TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

I Tính chất của các tích phân bất định và các tích phân thông dụng

1 Định nghĩa

Với $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên (a,b) thì $F'(x) = f(x), \forall x \in (a,b)$
Tập tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ là $F(x)+C$. Ký hiệu là:

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

2 Cách tính tích phân

2.1 Hai tính chất của tích phân

Để tính biểu thức trên ta có thể áp dụng hai tính chất của tích phân.

- Tính chất 1. Nếu với α, β là hằng số và $f(x) = \alpha g(x) + \beta h(x)$ thì

$$\int f(x)dx = \alpha \int g(x)dx + \beta \int h(x)dx$$

- Tính chất 2. Tính bất biến của tích phân bất định.
  Nếu $\int f(x)dx = F(x)+C$ với biến độc lập x thì với mọi hàm khả vi u, ta có

$$\int f(u)du = F(u)+C$$

2.2 Các công tích phân thông dụng

1. $\int x^\alpha dx = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha}{\alpha+1}, \alpha \neq -1 \\ \ln(x)+C, \alpha = -1 \end{cases}$

2. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln(a)} + C, a > 0, a \neq 1$

3. $\int \sin(x)dx = -\cos(x)+C$

4. $\int \cos(x)dx = \sin(x)+C$

5. $\int \dfrac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x)+C$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -\cot(x) + C$
7. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$
9. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$
12. $\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$
13. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$
14. $\int \frac{dx}{\sin(x)} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$
15. $\int \frac{dx}{\cos(x)} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$
16. $\int \tan(x)dx = -\ln|\cos(x)| + C$
17. $\int \cot(x)dx = \ln|\sin(x)| + C$

II Các phương pháp tính tích phân

1 Phương pháp đổi biến

$$\int f(x)dx = \int f(u(t)).u'(t)dt$$

trong đó, $x = u(t)$ là một hàm khả vi liên tục sau khi tính tích phân ở vế bên phải và chuyển về biến cũ bởi phép thế $t = u'(x)$.
Ta thường sử dụng phương pháp đổi biến để đưa tích phân cần tính về tích phân thông dụng, để đơn giản tích phân cần tính hoặc để khử căn thức, khử hàm lượng giác ngược và hàm logarit.

Ví dụ 1: Tính $I_1 = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \to t^2 = x^2+1 \to tdt = xdx$. Khi đó:

$$I_1 = \int \frac{tdt}{t} = \int dt = t + C = \sqrt{x^2+1} + C$$

Vậy $I_1 = \sqrt{x^2+1} + C$

Ví dụ 2: Tính $I_2 = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx \ \ (a > 0)$

Hướng dẫn giải

Đặt $x = a\tan(t), \frac{-\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$.
$\to dx = \frac{a}{\cos^2(t)}dt$
Lại có : $x^2 + a^2 = a^2(\tan^2 t + 1) = \frac{a^2}{\cos^2 t}$

Do đó:

$$I_2 = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 t dt = \frac{1}{2a^3}\int (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2a^3}(t + \sin t \cos t) + C$$

Do $t = \arctan\frac{x}{a}, \sin t \cos t = \tan(t).\cos^2(t) = \frac{\tan(t)}{\tan^2(t)+1} = \frac{ax}{x^2+a^2}$.
Vậy

$$I_2 = \frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + C$$

Bên cạnh đó, ta có thể dùng phép đổi biến $x = asinh(t)$.

2 Phương pháp tích phân từng phần

Với u, v là hai hàm khả vi liên tục của biến x, ta có công thức:

$$\int udv = uv - vdu$$

Chú ý: Thứ tự chọn hàm số là u :

1. Hàm Logarit / Hàm lượng giác ngược
2. Hàm đa thức
3. Hàm lượng giác
4. Hàm mũ

$\to$ **Mẹo ghi nhớ:** Nhất lô, nhì đa, tam lượng, tứ mũ

Ví dụ 1: Tính $\int (x^2+x)\sin x dx$

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases} u = x^2 + x \\ dv = \sin(x)dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = (2x+1)dx \\ v = -\cos x \end{cases}$ .Do đó

$$I = -(x^2+x)\cos x + \int (2x+1)\cos x dx$$
$$I = -(x^2+x)\cos x + \sin x + 2\int x\cos x dx$$

Ta xét: $I_1 = \int x\cos x dx$

Đặt $\begin{cases} u_1 = x \\ dv_1 = \cos x dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du_1 = dx \\ v_1 = \sin x \end{cases}$ Do đó:

$$I_1 = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$$

Nên ta có: $I = -(x^2+x)\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + \sin x + C$

Ví dụ 2: Tính $I = \int e^{3x}\sin 3x dx$

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases} u = \sin 3x \\ dv = e^{3x}dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = 3\cos(3x)\ dx \\ v = \dfrac{e^{3x}}{3} \end{cases}$

Do đó: $I = \dfrac{1}{3}\sin(3x)e^{3x} - \int \dfrac{e^{3x}}{3}.3\cos(3x)\ dx = \dfrac{1}{3}\sin(3x)e^{3x} - \int e^{3x}\cos(3x)\ dx$

Xét $I_1 = \int e^{3x}\cos(3x)\ dx$

Đặt $\begin{cases} u_1 = \cos 3x \\ dv_1 = e^{3x}dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du_1 = -3\sin(3x)\ dx \\ v = \dfrac{e^{3x}}{3} \end{cases}$

Ta có: $I_1 = \dfrac{1}{3}\cos(3x)e^{3x} + \int e^{3x}\sin(3x)\ dx = \dfrac{1}{3}\cos(3x)e^{3x} + I$

Suy ra:

$$I = \frac{1}{3}\sin(3x)e^{3x} - \frac{1}{3}\cos(3x)e^{3x} - I$$
$$I = \frac{1}{6}\sin(3x)e^{3x} - \frac{1}{6}\cos(3x)e^{3x}$$

3 Tính $\int f(x)dx$ với $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ là một phân thức hữu tỉ

* Nếu $f(x)$ là một phân thức hữu tỉ thực sự thì ta viết dưới dạng

$$Q(x) = (x-a)^k(x-b)^l \dots \left(x^2+\alpha x+\beta\right)^r \left(x^2+\gamma x+\delta\right)^s$$

trong đó, các nhị thức, các tam thức là khác nhau và các tam thức bậc 2 không có nghiệm thực, sau đó ta viết

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1}{(x-b)} + \dots + \frac{B_l}{(x-b)^l} + \\ & + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+\alpha x+\beta)} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+\alpha x+\beta)^2} + \dots + \frac{M_rx+N_r}{(x^2+\alpha x+\beta)^r} + \\ & + \frac{R_1x+L_1}{(x^2+\gamma x+\delta)} + \frac{R_2x+L_2}{(x^2+\gamma x+\delta)^2} + \dots + \frac{R_sx+L_s}{(x^2+\gamma x+\delta)^s} \end{aligned}$$

Ta xác định các hằng số $A_1 \dots A_k, \dots B_1 \dots B_l \dots M_1 \dots M_r \dots N_1 \dots N_r \dots R_1 \dots R_s \dots L_1 \dots L_s$ bằng phương pháp đồng nhất hệ số hoặc bằng cách gán cho x các giá trị đặc biệt.

Từ đó viết tích phân cần tính thành tổng tích phân phân thức đơn giản. Bằng việc tính các tính phân đơn giản, ta có thể dễ dàng suy ra tích phân cần tính ban đầu.
* Nếu $f(x)$ là hàm phân thức không thực sự, ta chia đa thức $P(x)$ cho đa thức $Q(x)$ để đưa $\int f(x)dx$ về tổng của các tích phân một đa thức và tích phân của 1 phân thức thực sự.

Ví dụ: Tính tích phân $I = \int \dfrac{x}{x^3+1}dx$

Hướng dẫn giải

Ta biến đổi tích phân bằng cách thêm bớt các hạng tử như sau:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x}{x^3+1}dx = \int \frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)}dx \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{(x^2-x+1)}dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx \\ &= \frac{1}{6}\int \frac{(2x-1)+3}{(x^2-x+1)}dx - \frac{1}{3}\ln|x+1| \\ &= \frac{1}{6}\int \frac{(2x-1)}{(x^2-x+1)}dx + \frac{1}{6}\int \frac{3}{(x^2-x+1)}dx - \frac{1}{3}\ln|x+1| \\ &= \frac{1}{6}\int \frac{d\left(x^2-x+1\right)}{(x^2-x+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx - \frac{1}{3}\ln|x+1| \\ &= \frac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right| + \sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

⋆ Cách phân tích $\dfrac{x}{x^3+1} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Mx+N}{x^2-x+1}$:
Ta thực hiện nhân cả hai vế với x^3+1 và biến đổi

$$\Rightarrow x = A\left(x^2 - x + 1\right) + (Mx + N)(x+1)$$
$$= (A+M)x^2 + (M+N-A)x + A + N$$
$$\Rightarrow \begin{cases} A + M = 0 \\ -A + M + N = 1 \\ A + N = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{-1}{3} \\ M = \dfrac{1}{3} \\ N = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Bài toán được giải quyết.

4 Tích phân hàm lượng giác

* Một tích phân được gọi là có thể hữu tỉ hóa nếu có thể sử dụng phương pháp đổi biến để chuyển nó về tích phân của một phân thức hữu tỉ.

* Ta dùng kí hiệu $R(u,v)$ để chỉ phân thức hữu tỉ của u và v. Kí hiệu tương tự để chỉ phân thức hữu tỉ có nhiều biến hơn.

* Xét tích phân $\int R(\sin x, \cos x)dx$, trong đó hàm dưới dấu tích phân là một biểu thức hữu tỷ đối với $\sin x, \cos x$. Ta có thể sử dụng phép đổi biến tổng quát $t = \tan\frac{t}{2}$, khi đó

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \tan x = \frac{2t}{1-t^2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

tích phân đang xét được đưa về tích phân của phân thức hữu tỉ của biến t.

Chú ý: Các trường hợp đặc biệt:

+ $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ thì ta đặt $t = \sin x$

+ $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$ thì ta đặt $t = \cos x$

+ $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$ thì ta đặt $t = \tan x$ hoặc $t = \cot x$

Ví dụ 1: Tính $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin x(2 + \cos x - 2\sin x)}$

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\arctan t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt$. Từ đó ta có $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ Ta có

$$I = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\frac{2}{1+t^2}\left(2 + \frac{1-t^2}{1+t^2} - 2\cdot\frac{2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{1+t^2}{t\left(t^2 - 4t + 3\right)}dt$$
$$= \int \left(\frac{1}{3t} + \frac{5}{3(t-3)} - \frac{1}{t-1}\right)dt$$
$$= \frac{1}{3}\ln|t| + \frac{5}{3}\ln|t-3| - \ln|t-1| + C$$

Bài toán được giải quyết.

Ví dụ 2: Tính $I = \displaystyle\int \frac{2\tan x + 3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx$

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$. Ta có biến đổi sau:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2\tan x + 3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx = \int \frac{2\tan x + 3}{\tan^2 x + 2} \frac{dx}{\cos^2 x} \\ &= \int \frac{2t+3}{t^2+2} dt = \int \left(\frac{2t}{t^2+2} + \frac{3}{t^2+2} \right) dt \\ &= \ln\left|t^2+2\right| + \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + C \end{aligned}$$

Bài toán được giải quyết.

* Nếu tích phân có dạng $\displaystyle\int \sin^m x \cos^n x dx$, trong đó m, n là các số nguyên:

- Nếu m là số nguyên dương lẻ, ta đặt $t = \cos x$.
- Nếu n là số nguyên dương lẻ, ta đặt $t = \sin x$.
- Nếu m, n là các số nguyên dương chẵn, ta sử dụng công thức hạ bậc:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

rồi đưa về tích phân dạng $\displaystyle\int \sin^k 2x \cos^l 2x dx$.

Ví dụ 3: Tính các tích phân bất định: $I_1 = \displaystyle\int \sin^3 x \cos^2 x dx$

Hướng dẫn giải

Đặt $\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$ ta có:

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \left(1 - t^2\right) t^2 (-dt) = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

5 Tích phân hàm vô tỉ

* Là tích phân của những hàm số có chứa ẩn dưới dấu căn, dạng bài này vô cùng phổ biến và hoàn toàn có thể sử dụng phương pháp hữu tỉ hóa đã nhắc ở trên để chuyển về tính tích phân của các hàm hữu tỉ.

* Ta xét các bài toán sau:

- Bài toán 1:

$$\int R\left(x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx$$

Để hữu tỉ hóa tích phân này, ta tìm mẫu số chung nhỏ nhất của các phân số $\dfrac{m}{n}, \ldots, \dfrac{r}{s}$ sau đó biến đổi $x = t^k$.

Ví dụ 1: Tính $I = \int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$

Hướng dẫn giải

Hàm lấy tích phân có dạng $R\left(x, x^{1/3}, x^{1/6}\right)$.
Đặt $x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$. Ta tính được tích phân sau:

$$I = \int \frac{t^6+t^4+t}{t^6(1+t^2)}.6t^5 dt = 6\int \frac{t^5+t^3+1}{1+t^2}dt = 6\int \left(t^3+\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$
$$= \frac{3}{2}t^4 + 6\arctan t + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 6\arctan\sqrt[6]{x} + C$$

Bài toán được giải quyết

- Bài toán 2:

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)$$

Tương tự như bài toán trên, ta sử dụng phép đổi biến: $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$.

Ví dụ 2: Tính $I = \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$

Hướng dẫn giải

Đặt $1-2x = t^4 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(1-t^4) = -2t^3 dt$

$$I = \int \frac{-2t^3}{t^2-t}dt = -2\int \frac{t^2}{t-1}dt = -2\int \left(t+1-\frac{2}{t-1}\right)dt$$
$$= -2\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C$$
$$= -\sqrt{1-2x} - 2\sqrt[4]{1-2x} - 2\ln\left|\sqrt[4]{1-2x}-1\right| + C$$

Bài toán được giải quyết

Ví dụ 3: Tính $I = \int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$

Hướng dẫn giải

Ta có $I = \int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}} = \int \frac{e^x}{\sqrt[4]{e^x+1}}e^x dx$

Đặt $t = \sqrt[4]{e^x+1} \Rightarrow t^4 = e^x + 1 \Rightarrow 4t^3 dt = e^x dx$.

$$I = \int \frac{t^4-1}{t}4t^3 dt = \int \left(4t^6 - 4t^2\right)dt = \frac{4}{7}t^7 - \frac{4}{3}t^3 + C$$
$$= \frac{4}{7}\left(\sqrt[4]{e^x+1}\right)^7 - \frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{e^x+1}\right)^3 + C$$

Bài toán được giải quyết.

- Bài toán 3:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$

Trong đó a, b, c là các hằng số và $a \neq 0$.
Ta biến đổi tam thức bậc hai về một trong ba dạng

$$ax^2 + bx + c = \left[\begin{array}{l} a[(x+\alpha)^2 + \beta^2] \\ a[(x+\alpha)^2 - \beta^2],\ a > 0 \\ -a[\beta^2 - (x+\alpha)^2],\ a < 0 \end{array}\right.$$

Sau đó chúng ta sử dụng phép đổi biến:

1. $x + \alpha = \beta \tan t$
2. $x + \alpha = \dfrac{\beta}{\cos t}$
3. $x + \alpha = \beta \sin t$ hoặc $x + \alpha = \beta \cos t$

Sau đó đưa tích phân về dạng $\int R(\cos x, \sin x)\, dx$.

Ví dụ 4: Tính $I = \displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}$

Hướng dẫn giải

Do $-x^2 + 2x + 3 = 4 - (x-1)^2$ nên ta đặt $x - 1 = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t\, dt$ $\quad$ ($\textbf{ĐK}: t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$).

$$I = \int \frac{2\cos t\, dt}{2\sin t.2\cos t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-1}{2}\right)\right| + C$$

Bài toán được giải quyết.

TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

I Các tiêu chuẩn khả tích

$$\left[\begin{array}{l} f(x) \text{ liên tục trên } [a,b] \\ f(x) \text{ bị chặn và có một số điểm gián đoạn trên } [a,b] \\ f(x) \text{ bị chặn và đơn điệu trên } [a,b] \end{array}\right. \Rightarrow f(x) \text{ khả tích trên } [a,b]$$

Nếu hàm $f(x)$ khả tích trên $[a,b]$, công thức liên hệ dãy số với tích phân xác định:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\left[\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+\frac{b-a}{n}\cdot i\right)\right] = \int\limits_a^b f(x)dx$$

Ví dụ 1. Dùng định nghĩa và cách tính tích phân xác định, tìm các giới hạn

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n\alpha}+\frac{1}{n\alpha+\beta}+\frac{1}{n\alpha+2\beta}+\ldots+\frac{1}{n\alpha+(n-1)\beta}\right], (\alpha,\beta>0)$$

Lời giải:

$$I = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n\alpha}+\frac{1}{n\alpha+\beta}+\frac{1}{n\alpha+2\beta}+\ldots+\frac{1}{n\alpha+(n-1)\beta}\right] = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n\alpha+i\beta}, (\alpha,\beta>0)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\alpha+\frac{i}{n}\beta}\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{\alpha+\beta x}dx = \left(\frac{1}{\beta}\ln|\alpha+\beta x|\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{\beta}\ln(1+\beta)$$

II Tính chất của tích phân xác định

1. Tuyến tính: $\int\limits_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int\limits_a^b f(x)dx + \beta\int\limits_a^b g(x)dx$

2. Cộng tính: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$

3. $f(x)\ge g(x) \quad \forall x\in[a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \ge \int\limits_a^b g(x)dx$

4. $f(x)$ khả tích trên $[a,b], m\le f(x)\le M \quad \forall x\in[a,b] \Rightarrow \exists\mu\in[m;M]: \int\limits_a^b f(x)dx \le \mu(b-a)$

5. $f(x)$ và $f(x)g(x)$ khả tích trên $[a,b], m\le f(x)\le M \quad \forall x\in[a,b]$ và $g(x)$ không đổi dấu trên $[a,b] \Rightarrow \exists\mu\in[m;M]: \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \le \mu\int\limits_a^b g(x)dx$

III Cách tính tích phân xác định

- Công thức Newton-Leibniz: $\begin{cases} f(x) \text{ liên tục trên } [a,b] \\ F(x) \text{ là nguyên hàm của } f(x) \end{cases} \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
- Sử dụng công thức tích phân từng phần: $\int\limits_a^b udv = uv|_a^b - \int\limits_a^b vdu$
- Sử dụng các phép đổi biến số

Ví dụ 2.

Tính các tích phân sau:

a) $\displaystyle\int_1^e (x\ln x)^2 dx$ b) $\displaystyle\int_0^{3\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$

Lời giải:

a) Đặt $I = \displaystyle\int_1^e (x\ln x)^2 dx$, Thực hiện tích phân từng phần:

$$\begin{cases} u &= (\ln x)^2 \\ dv &= x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2\dfrac{\ln x}{x}dx \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases} \rightarrow I = (\ln x)^2\frac{x^3}{3}|_1^e - \int_1^e \frac{2}{3}x^2\ln x dx$$

Thực hiện tích phân từng phần: $\displaystyle\int_1^e \frac{2}{3}x^2 \ln x dx = \ln x\frac{2x^3}{9}|_1^e - \int_1^e \frac{2}{9}x^2 dx = \frac{4}{27}e^3 + \frac{2}{27}$

$$I = \frac{e^3}{3} - (\frac{4}{27}e^3 + \frac{2}{27}) = \frac{5}{27}e^3 - \frac{2}{27}$$

b) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x + 2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x + 2}dx + \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x + 2}dx$

Đặt $u = \tan\dfrac{x}{2} \Leftrightarrow x = \arctan u \rightarrow dx = \dfrac{2}{1+u^2}du$

Ta có: $\sin x = \dfrac{2u}{u^2+1}; \cos x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$

$$\rightarrow I = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{2}{1+u^2}du}{2 + \frac{1-u^2}{1+u^2}} + \int_{-\infty}^{-1} \frac{\frac{2}{1+u^2}}{2+\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int_0^{+\infty} \frac{2}{3+u^2}du + \int_{-\infty}^{-1} \frac{2}{3+u^2}du$$

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{u}{\sqrt{3}}|_0^{+\infty} + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{u}{\sqrt{3}}|_{-\infty}^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi + \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi = \frac{5\sqrt{3}}{9}\pi$$

Tuy nhiên, khi tính tích phân xác định, trong một số trường hợp, việc tính nguyên hàm rất phức tạp, ta cần khai thác tính chất đặc biệt của cận tích phân và tính chẵn, lẻ, tuần hoàn của hàm số.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ thì:

a) $\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int\limits_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$

b) $\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{\pi}{2}f(\sin x)dx$

Áp dụng tính tích phân sau:

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x dx}{1+\cos^2 x}$$

Lời giải:

a) $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ nên $f(\sin x)$ và $f(\cos x)$ khả tích trên $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Xét tích phân $I = \int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)dx$. Đổi biến $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dx = -dt$.

Đổi cận: Khi $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$; khi $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$.Ta có:

$I = \int\limits_{\pi/2}^{0} f(\sin(\frac{\pi}{2} - t)).(-dt) = \int\limits_0^{\pi/2} f(\sin(\frac{\pi}{2} - t))dt = \int\limits_0^{\pi/2} f(\cos t)dt.$

Suy ra: $\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int\limits_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$ (dpcm).

b) Xét $J = \int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)dx$. Đặt $x = \pi - t \Rightarrow dx = -dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = \pi \\ x = \pi \Rightarrow t = 0 \end{cases}$. Ta có:

$J = \int\limits_{\pi}^{0} (\pi - x)f(\sin(\pi - t)).(-dt) = \int\limits_0^{\pi} (\pi - t)f(\sin(\pi - t)dt$

$= \int\limits_0^{\pi} (\pi - t)f(\sin t)dt = \int\limits_0^{\pi} \pi f(\sin t)dt - \int\limits_0^{\pi} tf(\sin t)dt$

Tức là: $J = \int\limits_0^{\pi} \pi f(\sin t)dt - J \Rightarrow J = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \pi f(\sin t)dt = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin t)dt.$

$\Rightarrow \int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{\pi}{2}f(\sin t)dt$(dpcm)

Áp dụng tính tích phân sau:

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x dx}{1+\cos^2 x}$$

Áp dụng đẳng thức ở câu b, với $f(x) = \frac{x}{2-x^2}$ là hàm liên tục trên $[0, 1]$.

$\Rightarrow f(\sin x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$.Ta có:

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x dx}{1+\cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2}.\frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x} = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{d(\cos z)}{1+\cos^2 x} = -\frac{\pi}{2}\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}.$$

TÍCH PHÂN SUY RỘNG

I Tích phân suy rộng loại 1

1 Định nghĩa

Giả sử $f(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $[a, +\infty)]$ và khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $[a, A], (aA < +\infty)$.

Định nghĩa 1. Giới hạn của tích phân $\int_a^A f(x)dx$ khi $A \to +\infty$ được gọi là tích phân suy rộng của hàm số $f(x)$ trên khoảng $[a, +)$ và ký hiệu như sau

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx$$

Nếu giới hạn này tồn tại hữu hạn ta nói tích phân suy rộng hội tụ.
Ngược lại, nếu không tồn tại giới hạn này hoặc giới hạn bằng vô cùng ta nói tích phân đó phân kỳ.

2 Các tiêu chuẩn hội tụ

Định lý 1: Tiêu chuẩn so sánh

1. Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ khả tích trên mọi khoảng hữu hạn $[a, b]$ với $b > a$ và ta có bất đẳng thức: $0 \le f(x) \le g(x), \forall x \in [a, +\infty)$. Khi đó:

i) Nếu $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ;

ii) Nếu $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ.

2. Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là 2 hàm số dương khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $[a, b]$ với $b > a$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k (0 < k < +\infty)$. Khi đó, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Định lý 2: Cho f và g là 2 hàm số dương trên $[a, +\infty)$. Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các VCB hoặc VCL, và $f(x) \sim g(x)$ khi $x \to +\infty$ thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Hệ quả Cho f và g là 2 hàm số dương trên $[a, +\infty)$. Khi đó:

1. Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ và $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

2. Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$ và $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ thì $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

Ví dụ 1. Xét sự hội tụ của các tích phân sau:

a) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$ b) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$

Lời giải:

a) Đặt $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$, $g(x)=\dfrac{1}{x^{3/2}}$ là các hàm dương, liên tục trên $[1,+\infty]$.

Xét giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\ln(1+x)}{x^2}}{\frac{1}{x^{3/2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$ (Dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$)

(Dùng L'Hospital) $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{x}}{x}=0.$

Mà $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}g(x)dx=\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^{3/2}}dx$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh (vì $\alpha=\dfrac{3}{2}>1$)

$\Rightarrow\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}f(x)dx=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^2}$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

b) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+x^3}}>0$ liên tục trên $[1,+\infty]$.

Khi $x\to+\infty$ thì $\dfrac{1}{\sqrt{x+x^3}}\sim\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$, mà $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^{3/2}}dx$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh (vì $\alpha=\dfrac{3}{2}>1$)

$\Rightarrow\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}f(x)dx=\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

II Tích phân suy rộng loại 2

1 Định nghĩa

Giả sử $f(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $[a,b)$ và khả tích trên mọi đoạn $[a,t],(t<b$ bất kỳ), và $\lim_{x\to b}f(x)=\infty$. Điểm $x=b$ được gọi là điểm bất thường (điểm kỳ dị) của hàm số $f(x)$.

Định nghĩa 2. Giới hạn của tích phân $\displaystyle\int_a^k f(x)dx$ khi $k\to b-$ được gọi là tích phân suy rộng của hàm số $f(x)$ trên khoảng $[a,b)$ và ký hiệu như sau

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{k\to b}\int_a^k f(x)dx$$

Nếu giới hạn này tồn tại hữu hạn ta nói tích phân suy rộng hội tụ.

Ngược lại, nếu không tồn tại giới hạn này hoặc giới hạn bằng vô cùng ta nói tích phân đó phân kỳ.

2 Các tiêu chuẩn hội tụ

Định lý 1: Tiêu chuẩn so sánh

1. Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ khả tích trên $[a, b)$ và có cùng b là điểm bất thường và ta có bất đẳng thức: $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b)$. Khi đó:

i) Nếu $\int\limits_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ;

ii) Nếu $\int\limits_a^b f(x)dx$ phân kỳ thì $\int\limits_a^b g(x)dx$ phân kỳ.

2. Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ khả tích trên $[a, b)$ và có cùng b là điểm bất thường và ta có $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k(0 < k < +\infty)$. Khi đó, $\int\limits_a^b f(x)dx$ và $\int\limits_a^b g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Định lý 2: Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ khả tích trên $[a, b)$ và có cùng b là điểm bất thường. Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các VCB hoặc VCL, và $f(x) \sim g(x)$ khi $x \to b-$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx$ và $\int\limits_a^b g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Hệ quả Cho f và g là 2 hàm số dương trên $[a, b)$. Khi đó:

1. Nếu $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ và $\int\limits_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ.

2. Nếu $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ và $\int\limits_a^b g(x)dx$ phân kỳ thì $\int\limits_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

Ví dụ 2. Xét sự hội tụ của các tích phân sau:

a) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\tan x - x}$

b) $\int\limits_0^1 \dfrac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}dx$

Lời giải:

a) Nhận thấy: $f(x) = \tan x - x$ đồng biến trên $(0, +\infty) \Rightarrow 0 = f(0) < f(x) \leq f(1) < 2$.

Tích phân đã cho là tích phân suy rộng có điểm bất thường là $x = 0$.

Khi $x \to 0^+$, ta có: $\dfrac{1}{\tan x - x} = \dfrac{1}{\left[x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)\right] - x} \sim \dfrac{3}{x^3}$.

Mặt khác $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{x^3}dx$ phân kỳ vì $\alpha = 3 \notin (0, 1) \Rightarrow \int\limits_0^1 \dfrac{3}{x^3}dx$ phân kỳ.

$\Rightarrow \int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\tan x - x}$ phân kỳ theo tiêu chuẩn so sánh.

b) Đặt $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1 - x^4}} \geq 0$ liên tục trên $[0, 1)$.

Điểm bất thường của tích phân suy rộng là $x = 1$.

Khi $x \to 1^-$, ta có: $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x^4}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{(1 - x)(1 + x + x^2 + x^3)}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{3}}.\dfrac{1}{(1 - x)^{1/2}}$.

Ta lại có: $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{3}}.\dfrac{1}{(1 - x)^{1/2}}dx$ hội tụ (do $\alpha = \dfrac{1}{2} \in (0, 1)$)

$\Rightarrow \int\limits_0^1 \dfrac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1 - x^4}}dx$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

CÁC ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

I Tính diện tích hình phẳng

- Nếu D giới hạn bởi các đường $\begin{cases} x = a, x = b \\ y = f_1(x), y = f_2(x) \\ f_1(x), f_2(x) \in \mathbf{C}[a;b] \end{cases}$ thì

$$\boxed{S(D) = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx}$$

- Nếu D giới hạn bởi các đường $\begin{cases} y = c, y = d \\ x = g_1(y), x = g_2(y) \\ g_1(y), g_2(y) \in \mathbf{C}[c;d] \end{cases}$ thì

$$\boxed{S(D) = \int_c^d |g_1(y) - g_2(y)| dy}$$

- Nếu D giới hạn bởi các đường $\begin{cases} x = x(t), y = y(t) \\ x = a, x = b \\ y = 0 \end{cases}$ thì

$$\boxed{S(D) = \int_{t_1}^{t_2} |y(t)x'(t)| dx}$$

trong đó giả thiết rằng phương trình $x(t) = a$, $x(t) = b$ có nghiệm duy nhất lần lượt là t_1, t_2

- Nếu D giới hạn bởi các đường $\begin{cases} r = r_1(\varphi), r = r_2(\varphi) \\ \varphi = a, \varphi = b \\ r_1(\varphi), r_2(\varphi) \in \mathbf{C}[a;b] \end{cases}$ thì

$$\boxed{S(D) = \frac{1}{2} \int_a^b |r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)| d\varphi}$$

Ví dụ 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

a) Parabol $y = x^2 + 4$ và đường thẳng $x - y + 4 = 0$

b) Đường cong $y = x^3$ và các đường $y = x, y = 4x, (x \geq 0)$

c) Đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ và parabol $y^2 = x$

d) Đường $y^2 = x^2 - x^4$

Hướng dẫn giải:

a) Phương trình hoành độ giao điểm của parabol và đường thẳng là:

$x^2 + 4 = x + 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array} \right.$. Hai đồ thị cắt nhau tại các điểm $(0, 4)$ và $(1, 5)$.

$\Rightarrow S = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$

b) Do tính chất đối xứng của hàm qua tâm O do các hàm đều là hàm lẻ nên xét diện tích S_1 là nửa trên của đồ thị $(x \geq 0)$.

Ta có:

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^2 (4x - x^3)dx - \int_0^1 (x - x^3)dx \\ &= \left(2x^2 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{15}{4} \end{aligned}$$

Khi đó diện tích cần tìm là: $S = 2S_1 = \frac{15}{2}$

c) Do hàm số của đồ thị chẵn đối với y nên ta xét $y \geq 0$.

Khi đó các phương trình trở thành: $y = \sqrt{2x - x^2}$ và $y = \sqrt{x}$

Diện tích nửa trên của đồ thị tạo với trục Ox là:

$S_1 = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \left(\sqrt{2x - x^2} - \sqrt{x} \right) dx$

Xét tích phân: $I = \int_0^1 \sqrt{2x - x^2}dx = \int_0^1 \sqrt{1 - (x-1)^2}dx$.

Đặt $x - 1 = \sin\theta \Rightarrow \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0 \right]$

Khi đó: $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2\theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{\pi}{4}$

Vậy $S_1 = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} \Rightarrow S = 2S_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}$

d) Điều kiện xác định: $x^2 - x^4 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

Do hàm đã cho chẵn đối với cả x và y nên ta xét miền đồ thị ở góc phần tư thứ nhất D được giới hạn bởi: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ y = \sqrt{x^2 - x^4} \end{cases}$

Đặt $x = \sin\theta \Rightarrow \theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, ta có:

$$\begin{aligned} S(D) &= \int_0^1 \sqrt{x^2 - x^4}dx = \int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos^2\theta d\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\cos\theta \\ &= -\frac{\cos^3\theta}{3}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

II Tính thể tích vật thể

- Nếu D được cắt bởi các lát vuông góc với Ox và xác định được diện tích thiết diện tại điểm $x \in [a; b]$ là $S(x)$ thì

$$\boxed{V(D) = \int_a^b S(x)dx}$$

- Nếu D được cắt bởi các lát vuông góc với Oy và xác định được diện tích thiết diện tại điểm $y \in [c; d]$ là $S(y)$ thì

$$\boxed{V(D) = \int_c^d S(y)dy}$$

- Nếu D là vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình thang cong $y = f(x), y = 0,\ a \leq x \leq b, f(x) \in \mathbf{C}[a; b]$ quanh trục Ox thì

$$\boxed{V(D) = \pi\int_a^b f(x)^2dx}$$

- Nếu D là vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình thang cong $x = g(y), x = 0, c \leq y \leq d, g(y) \in \mathbf{C}[c; d]$ quanh trục Oy thì

$$\boxed{V(D) = \pi\int_c^d g(y)^2dy}$$

- Nếu D là vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình thang cong $y = f(x), y = 0,\ a \leq x \leq b, f(x) \in \mathbf{C}[a; b]$ quanh trục Oy thì

$$\boxed{V(D) = 2\pi\int_a^b x|f(x)|dx}$$

- Nếu D là vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình thang cong $x = g(y), x = 0, c \leq y \leq d, g(y) \in$ $\mathbf{C}[c; d]$ quanh trục Ox thì

$$\boxed{V(D) = 2\pi \int_c^d y|g(y)|dy}$$

Ví dụ 2. Tính thể tích của vật thể là phần chung của hai hình trụ $x^2 + y^2 \leq a^2$ và $y^2 + z^2 \leq a^2$, $a > 0$

Hướng dẫn giải:

Do các hàm đều chẵn đối với $x, y, z \Rightarrow$ Vật thể đối xứng qua cả ba trục tọa độ Decartes.

Xét phần vật thể là phần chung của hai hình trụ có lần lượt phương trình là $x^2 + y^2 \leq a^2$ và $y^2 + z^2 \leq a^2$ ở góc phần tám thứ nhất (như hình vẽ).

Xét mặt giao bởi hai hình trụ có phương trình $x^2 + y^2 \leq a^2$ và $y^2 + z^2 \leq a^2$. Suy ra:

$$x = z = \sqrt{a^2 - y^2}$$

Khi đó xét thiết diện tạo bởi mặt phẳng song song với trục Oy với phần vật thể đang xét, khi đó thiết diện là một hình vuông có cạnh r = $\sqrt{a^2 - y^2}$. Do đó diện tích của thiết diện là:

$$S(y) = a^2 - y^2$$

Khi đó theo công thức tính thể tích vật thể ứng với thiết diện ta có:

$$V' = \int_0^a S(y)dy = \int_0^a (a^2 - y^2)dy = (a^2y - \frac{y^3}{3})\Big|_0^a = \frac{2}{3}a^3$$

Suy ra thể tích của vật thể cần tính là: $V = 8V' = \dfrac{16}{3}a^3$

Ví dụ 3. Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay hình giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$ và $y = 0$.

a) Quanh trục Ox một vòng.

b) Quanh trục Oy một vòng.

Hướng dẫn giải:

a) Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường là:

$$2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2)dx = \frac{16}{15}\pi$$

b) Thể tích của khối tròn xoay được tính theo công thức:

$$V_{Oy} = 2\pi \int_0^2 xf(x)dx = 2\pi \int_0^2 x(2x - x^2)dx = 2\pi \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2 = \frac{8\pi}{3}$$

III Tính độ dài đường cong

Các bước thiết lập công thức tính độ dài đường cong:

Bước 1 (Vi phân): Chia đường cong thành những phần rất nhỏ ds.

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

Bước 2 (Tích phân): Độ dài đường cong S chính là tổng diện tích các phần rất nhỏ ở trên:

$$S(C) = \int_C ds$$

- Nếu C giới hạn bởi các đường $\begin{cases} a \le x \le b \\ y = f(x) \\ f(x) \in \mathbf{C}[a;b] \end{cases}$ thì

$$\boxed{s(C) = \int_a^b \sqrt{1 + |f'(x)|}dx}$$

- Nếu C giới hạn bởi các đường $\begin{cases} c \le y \le d \\ x = g(y) \\ g(y) \in \mathbf{C}[c;d] \end{cases}$ thì

$$\boxed{s(C) = \int_c^d \sqrt{1 + |g'(y)|}dy}$$

- Nếu C giới hạn bởi các đường $\begin{cases} x = x(t), y = y(t) \\ t_1 \le t \le t_2 \end{cases}$ thì

$$\boxed{s(C) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt}$$

- Nếu C giới hạn bởi các đường $\begin{cases} r = r(\varphi) \\ \alpha \le \varphi \le \beta \end{cases}$ thì

$$\boxed{s(C) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[r'(\varphi)]^2 + [r(\varphi)]^2}\varphi}$$

Ví dụ 4. Tính độ dài đường cong

a) $y = \ln \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ khi x biến thiên từ 1 đến 2

b) $\begin{cases} x = a\left(\cos t + \ln \tan \dfrac{t}{2}\right) \\ y = a\sin t \end{cases}$ khi t biến thiên từ $\dfrac{\pi}{3}$ đến $\dfrac{\pi}{2}$, $(a>0)$.

Hướng dẫn giải:

a) $y = \ln \dfrac{e^x+1}{e^x-1} \Rightarrow y' = \dfrac{e^x}{e^x+1} - \dfrac{e^x}{e^x-1} = \dfrac{-2e^x}{e^{2x}-1}$

$\Rightarrow y'^2 + 1 = \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} + 1 = \dfrac{(e^{2x}+1)^2}{(e^{2x}-1)^2}$

Khi đó độ dài đường cong cần tính là:

$L = \displaystyle\int_1^2 \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}dx$. Đặt $t = e^{2x}-1 \Rightarrow dt = 2e^{2x}dx = 2(t+1)dx$

Khi đó:

$$\begin{aligned} L &= \int_{e^2-1}^{e^4-1} \frac{t+2}{2t(t+1)}dt = \frac{1}{t} - \frac{1}{2(t+1)} \\ &= \left(\ln t - \frac{1}{2}\ln(t+1)\right)\Bigg|_{e^2-1}^{e^4-1} \\ &= (\ln(e^4-1)-2) - (\ln(e^2-1)-1) \\ &= \ln(e^2+1) - 1 = \ln(\frac{e^2+1}{e}) \end{aligned}$$

b) Ta có: $x'(t) = a\left(\sin t + \dfrac{\tan^2\frac{t}{2}+1}{2\tan\frac{t}{2}}\right) = a(-\sin t + \dfrac{1}{\sin t})$

$y'(t) = a\cos t$

$\Rightarrow \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)} = a\sqrt{\sin^2 t + \dfrac{1}{\sin^2 t} - 2t\cos^2 t}$

$= a\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2 t} - 1} = a|\cot t|$

Độ dài đường cong:

$$\begin{aligned} L &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} a|\cot t|dt = a\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin t)}{\sin t} \\ &= a\ln(\sin t)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= a\ln\frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

IV Tính diện tích mặt tròn xoay

Cách thiết lập công thức từ lược đồ vi phân: Vi phân của diện tích mặt $dS = 2\pi|f(x)|ds$, với ds được tính bởi:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

- Nếu S là mặt tròn xoay được tạo thành khi quay đường cong $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ y = f(x) \\ f(x) \in \mathbf{C}[a;b] \end{cases}$ quanh trục Ox thì

$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + |f'(x)|}dx}$$

- Nếu S là mặt tròn xoay được tạo thành khi quay đường cong $\begin{cases} c \leq y \leq d \\ x = g(y) \\ g(y) \in \mathbf{C}[c;d] \end{cases}$ quanh trục Oy thì

$$\boxed{S = 2\pi \int_c^d |g(y)|\sqrt{1 + |g'(y)|}dy}$$

Ví dụ 5. Tính diện tích mặt tròn xoay tạo nên khi quay các đường sau

a) $y = \sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ quay quanh trục Ox

b) $y = \frac{1}{3}(1-x)^3, 0 \leq x \leq 1$ quay quanh trục Ox

Hướng dẫn giải: Sử dụng công thức tính diện tích mặt tròn xoay:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$

a) $S = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\sqrt{1 + \cos^2 x}dx$

Đặt $t = -\cos x, (-1 \leq t \leq 0) \Rightarrow dt = \sin x dx$

Khi đó:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-1}^0 \sqrt{t^2+1}dt \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{2}t\sqrt{t^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)\right)\Big|_{-1}^0 \\ &= \pi\left(\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2}-1)\right) \end{aligned}$$

b) Ta có: $y' = -(1-x)^2 \Rightarrow S = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{3}(1-x)^3\sqrt{1+(x-1)^4}dx$

Đặt $t = (x-1)^4 \Rightarrow \begin{cases} 0 \le t \le 1 \\ dt = 4(x-1)^3dx \end{cases}$

Khi đó:

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi}{6}\int_0^1 \sqrt{1+t}dt \\ &= \frac{2}{3}\frac{\pi}{6}(1+t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right) \end{aligned}$$