DÃY SỐ

1 Định nghĩa

Một ánh xạ $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ là một dãy số thực.

$$n \longrightarrow x_n = f(n)$$

Dãy số: $x_1, x_2, \ldots, x_n$

2 Giới hạn dãy số

2.1 Định nghĩa

- $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a, a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), \forall n \in \mathbb{N}, n > N(\varepsilon) : |u_n - a| < \varepsilon$

- $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \pm\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N, \forall n \in \mathbb{N}, n > N$: $|u_n| > M$

2.2 Các tiêu chuẩn tồn tại giới hạn hữu hạn

- Tiêu chuẩn đơn điệu bị chặn: Nếu một dãy số tăng, bị chặn trên hoặc giảm, bị chặn dưới thì dãy số đó có giới hạn hữu hạn.
- Tiêu chuẩn kẹp: Cho ba dãy $(x_n), (y_n), (z_n)$ thỏa mãn $x_n \le y_n \le z_n \ \forall n \ge a, a \in \mathbb{N}^*$ và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = L$. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = L$.
- Tiêu chuẩn Cauchy: Điều kiện cần và đủ để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn là:
$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon); \forall m, n \in N; m, n > N(\varepsilon) : |u_m - u_n| < \varepsilon$

Ví dụ 1. Xét sự hội tụ và tìm giới hạn (nếu có) của các dãy với số hạng tổng quát như sau:

a) $x_n = n - \sqrt{n^2 - n}$

b) $x_n = \dfrac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n}$

c) $x_n = \dfrac{1}{2}\left(x_{n-1} + \dfrac{1}{x_{n-1}}\right), \quad x_0 > 0$

Lời giải

1. $x_n = n - \sqrt{n^2 - n}$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \left(n - \sqrt{n^2 - n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n + \sqrt{n^2 - n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \dfrac{1}{n}}}$$
$$= \frac{1}{2}$$

Vậy x_n hội tụ và có giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$

2. $x_n = \dfrac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n}$

Ta thấy: Do $0 \le \sin^2 n \le 1, -1 \le \cos^3 n \le 1 \Rightarrow -1 \le \sin^2 n - \cos^3 n \le 2$

$\Rightarrow \frac{-1}{n} \le x_n \le \frac{2}{n}$

Lại có: $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ theo tiêu chuẩn kẹp.

Vậy x_n hội tụ và có giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$

3. $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}\right), \quad x_0 > 0$

[Phân tích]

Ta sẽ chứng minh dãy hội tụ bằng tiêu chuẩn đơn điệu và bị chặn trên hoặc dưới.

Đầu tiên kiểm tra: $x_n - x_{n-1} = \frac{1 - x_{n-1}^2}{2x_{n-1}}$

Bây giờ để biết dãy tăng hay giảm chỉ cần kiểm tra xem dấu của $1 - x_{n-1}^2$

Dễ thấy $x_0 > 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) \ge \frac{1}{2}.2\sqrt{x_0.\frac{1}{x_0}} = 1$ theo BĐT Cauchy.

Tương tự ta thấy $x_2, x_3, \ldots \ge 1$. Dự đoán $1 - x_{n-1}^2 \le 0, \forall n \ge 2$.

Vậy ta sẽ chứng minh dãy giảm, và để chứng minh $x_{n-1} \ge 1$ ta sẽ dùng quy nạp.

[Giải]

- Dễ thấy $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$
- Chứng minh: $x_n \ge 1 \quad \forall n > 0 \quad (1)$
  - Ta thấy (1) đúng với $n = 1$ do $x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) \ge \frac{1}{2}.2\sqrt{x_0.\frac{1}{x_0}} = 1$ theo BĐT Cauchy
  - Giả sử (1) đúng với $n = k \Rightarrow x_k \ge 1$
  - Ta sẽ chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$

    Thật vậy: $x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{1}{x_k}\right) \ge \frac{1}{2}.2\sqrt{x_k.\frac{1}{x_k}} = 1$ theo BĐT Cauchy.

  Vậy (1) đúng theo giả thiết quy nạp.
- Ta có: $x_n - x_{n-1} = \frac{1 - x_{n-1}^2}{2x_{n-1}} \le 0 \quad \forall n > 0$ (do $x_n \ge 1, \forall n > 0$)

  Vậy dãy x_n là dãy giảm và bị chặn dưới do $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

  Do đó x_n hội tụ. Gọi $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$

  Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n-1} + \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n-1}}\right)$

  $\Rightarrow a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \Rightarrow a = \pm 1 \Rightarrow a = 1$ (do $x_n \ge 1, \forall n > 0$)

  Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

1 Một số khái niệm cơ bản về hàm số

- Hàm số f với tập xác định D được gọi là *hàm số chẵn* nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(x) = f(-x)$.
- Hàm số f với tập xác định D được gọi là *hàm số lẻ* nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(x) = -f(-x)$.
- Hàm số f với tập xác định D được gọi là *hàm số tuần hoàn* $\Leftrightarrow \exists T > 0, \forall x \in D : x + T \in D$ và $f(x+T) = f(x)$
- Hàm hợp: $y = f(x), x = g(t)$ có hàm hợp $y = f \circ g := f(g(t))$.
- Hàm ngược: $y = f(x)$ có TXĐ X, TGT Y có hàm ngược $x = g(y) \Leftrightarrow (f \circ g)(y) = y, \forall y \in Y$ và $(g \circ f)(x) = x, \forall x \in X$. Hàm số ngược của $y = f(x)$ được kí hiệu là $y = f^{-1}(x), x \in Y$.

Ví dụ 1. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = x^2 + \cos 3x + x^4$

Lời giải

+) Tập xác định của hàm số: D = $\mathbb{R}$.
+) $\forall x \in D \Rightarrow$ -x $\in D$

+) Ta có: $f(x) = x^2 + \cos 3x + x^4$
$f(-x) = (-x)^2 + \cos -3x + (-x)^4 = x^2 + \cos 3x + x^4$
$\Rightarrow f(x) = f(-x) \forall x \in D$
Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Ví dụ 2. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ của các hàm số sau (nếu có):

a) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$ b) $f(x) = \sin x^2$

Lời giải

a) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$
[Phân tích]
+) $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_1 = 2\pi$
+) $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_1 = \pi$
+) $y = \sin 3x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_1 = \frac{2\pi}{3}$
Nên ta dễ dàng thấy $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$
[Giải]
Dễ thấy:
$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x = \sin(x+2\pi) + \frac{1}{2}\sin 2(x+2\pi) + \frac{1}{3}\sin 3(x+2\pi)$
$\forall x \in \mathbb{R}$
Ta sẽ chứng minh $T = 2\pi$ là chu kỳ cơ sở của $f(x)$
Giả sử tồn tại T_1 sao cho $0 < T_1 < T$ và:

$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x = \sin(x+T_1) + \frac{1}{2}\sin 2(x+T_1) + \frac{1}{3}\sin 3(x+T_1)$
$\forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$

Tại (1) cho $x=0$ ta có: $\sin T_1 + \frac{1}{2}\sin 2T_1 + \frac{1}{3}\sin 3T_1 = 0 \quad (2)$

Tại (1) cho $x=\pi$ ta có: $-\sin T_1 + \frac{1}{2}\sin 2T_1 - \frac{1}{3}\sin 3T_1 = 0 \quad (3)$

Từ$(2)(3) \Rightarrow \sin T_1 + \frac{1}{3}\sin 3T_1 = 0$

$$\Rightarrow \sin T_1 + \frac{1}{3}\left(3\sin T_1 - 4\sin^3 T_1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sin T_1\left(2 - \frac{4}{3}\sin^2 T_1\right) = 0 \Rightarrow \sin T_1 = 0 \Rightarrow T_1 = \pi$$

Thử lại với $T_1 = \pi$ thì tại $x_0 = \frac{\pi}{2}$:

$\sin x_0 + \frac{1}{2}\sin 2x_0 + \frac{1}{3}\sin 3x_0 \neq \sin(x_0+\pi) + \frac{1}{2}\sin 2(x_0+\pi) + \frac{1}{3}\sin 3(x_0+\pi)$

Vậy không tồn tại T_1

Do đó hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ cơ sở $T = 2\pi$

b) $f(x) = \sin x^2$

[Phân tích]

Một hàm số tuần hoàn thì đạo hàm của nó cũng sẽ tuần hoàn

Ta dễ thấy $f'(x) = 2x\cos x^2$ không tuần hoàn nên ta sẽ chứng minh hàm số $f(x)$ không tuần hoàn

Để chứng minh hàm số không tuần hoàn cách đơn giản nhất là dùng phản chứng

[Giải]

Giả sử hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ $T > 0$:

$\Rightarrow \sin x^2 = \sin(x+T)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$ +) Tại (1) cho $x = 0$ ta được: $\sin T^2 = 0 \Rightarrow T^2 = k\pi \Rightarrow T = \sqrt{k\pi} \quad (k \in \mathbb{N}^*)$

+) Tại (1) cho $x = \sqrt{\pi}$ ta được: $\sin(\sqrt{\pi}+T)^2 = 0 \Rightarrow (\sqrt{\pi}+T)^2 = l\pi \quad (l \in \mathbb{N}^*)$

$\Rightarrow (\sqrt{\pi}+\sqrt{k\pi})^2 = l\pi \Rightarrow k$ là số chính phương do $l \in \mathbb{N}^*$

Đặt $k = h^2, (h \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow T = h\sqrt{\pi}$

+) Tại (1) cho $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ta được: $\sin\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}+T\right)^2 = 1$

$\Rightarrow \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}+T\right)^2 = \frac{\pi}{2} + 2m\pi \quad (m \in \mathbb{N}^*)$

$\Rightarrow \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}+h\sqrt{\pi}\right)^2 = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{2h\pi}{\sqrt{2}} + h^2\pi = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$

$\Rightarrow 2m = h^2 + \sqrt{2}h \quad$ (vô lý do $m \in \mathbb{N}^*$)

Vậy hàm số $f(x)$ không tuần hoàn.

2 Các hàm số sơ cấp cơ bản

- x^α, TXĐ: phụ thuộc vào α.
- $a^x, 0 < a \neq 1$, TXĐ: $\mathbb{R}$, TGT: $(0;+\infty)$.

- $\log_a x, 0 < a \neq 1$, TXĐ: $(0;+\infty)$, TGT: $\mathbb{R}$
- Các hàm lượng giác: $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$
- Các hàm lượng giác ngược:

	$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$	$y = \arctan x$	$y = \text{arccot}\, x$
TXĐ	$[-1;1]$	$[-1;1]$	$(-\infty;\infty)$	$(-\infty;\infty)$
TGT	$\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$	$[0;\pi]$	$\left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$	$(0;\pi)$

- Các hàm hyperbolic:
$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$;
$\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Ví dụ 3. Tìm tập giá trị của hàm số $y = arccot\sqrt{3 - x^4}$

Lời giải

+) ĐKXĐ: $3 - x^4 \geq 0 \Rightarrow -\sqrt[4]{3} \leq x \leq \sqrt[4]{3} \Rightarrow$ D $= [-\sqrt[4]{3}; \sqrt[4]{3}]$.
+) Ta có: $-\sqrt[4]{3} \leq x \leq \sqrt[4]{3} \Rightarrow 0 \leq x^4 \leq 3 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{3 - x^4} \leq \sqrt{3}$

Vì hàm $arccotx$ là hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $arccot\sqrt{3} \leq y \leq arccot 0 \Rightarrow \dfrac{\pi}{6} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$

Vậy tập giá trị của hàm số là $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right]$

Ví dụ 4. Tìm tập xác định của hàm số: $y = \sqrt{2x - 1} + 4\arcsin\dfrac{3x - 1}{4}$

Lời giải

ĐKXĐ: $\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ -1 \leq \dfrac{3x - 1}{4} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ -1 \leq x \leq \dfrac{5}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow D = \left[\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{3}\right]$

Vậy tập xác định của hàm số là D $= \left[\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{3}\right]$.

Ví dụ 5. Tìm hàm ngược của hàm số $y = \sinh 2x$.

Lời giải

+) Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

+) Xét phương trình: $y = \sinh 2x$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$

$\Leftrightarrow 2y = e^{2x} - e^{-2x}$

$\Leftrightarrow 2y.e^{2x} = (e^{2x})^2 - 1$
$\Leftrightarrow (e^{2x})^2 - 2y.e^{2x} + y^2 - y^2 - 1 = 0$
$\Leftrightarrow (e^{2x} - y)^2 = y^2 + 1$
$\Leftrightarrow e^{2x} = y + \sqrt{y^2+1}$(thỏa mãn) hoặc $e^{2x} = y - \sqrt{y^2+1}$ (loại vì $e^{2x} > 0$)
$\Leftrightarrow$ x = $\dfrac{1}{2}\ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$
Vậy hàm ngược của hàm số $y = \sinh 2x$ là hàm $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

3 Hàm số sơ cấp

Các hàm số sơ cấp cơ bản được tạo bởi số hữu hạn các phép toán tổng, hiệu, tích, thương, phép lấy hợp và các hằng số.

GIỚI HẠN HÀM SỐ

1 Định nghĩa

1.1 Giới hạn hàm số

Hàm $f(x)$ xác định trên (a,b) được gọi là có giới hạn A khi $x \to x_0 \in [a,b]$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

1.2 Giới hạn trái, giới hạn phải

- **Giới hạn trái**: Kí hiệu $x \to x_0^-$ là x dần tới x_0 nhưng luôn nhỏ hơn x_0. Ta nói A là giới hạn trái tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$.
- **Giới hạn phải**: Kí hiệu $x \to x_0^+$ là x dần tới x_0 nhưng luôn lớn hơn x_0. Ta nói A là giới hạn phải tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$.
- **Điều kiện tồn tại giới hạn:** Một hàm số tồn tại giới hạn, khi giới hạn trái và giới hạn phải của chúng tồn tại và bằng nhau.

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A$$

Ví dụ 1. Xét hàm $f(x) = \begin{cases} x+1 & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases}$

Ta có $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}(x+1) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}(-x^2) = 0$

Do đó $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ nên không tồn tại giới hạn của $f(x)$ tại $x = 0$

2 Các tính chất của giới hạn

- Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$, ở đó a, b là các số thực hữu hạn. Khi đó :

- Tổng:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = a + b$$

- Hiệu:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = a - b$$

- Tích :

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)g(x)] = ab$$

- Thương:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b},\text{ nếu } b\neq 0$$

Chú ý 1. Nếu các giới hạn ở dạng vô định, những phép toán trên sẽ không thực hiện được. Các dạng vô định bao gồm:

$$\infty-\infty, 0\times\infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0$$

[Một số cách khử dạng vô định]

- Sử dụng các phép biến đổi đại số (Nhân liên hợp, phân tích thành nhân tử,...)
- Sử dụng các giới hạn đặc biệt:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

g) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha,$ $(\alpha\in\mathbb{R})$

- Thay thế VCB, VCL tương đương; ngắt bỏ VCB bậc cao, VCL bậc thấp.
- Dùng quy tắc L'Hospital
- Sử dụng khai triển Taylor, Maclaurin để tính giới hạn

Trong tài liệu này sẽ tập trung trình bày 3 phương pháp đầu, 2 mục còn lại sẽ trình bày chi tiết trong các tài liệu sau.

Ví dụ 2. Tính $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan 2x+3\sin x}{x}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arctan 2x}{2x}=2.$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$\to\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan 2x+3\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan 2x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x}{x}=2+3=5$

Ví dụ 3. Tính giới hạn của các hàm số sau, áp dụng phương pháp phân tích thành nhân tử:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to a}\frac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$

Lời giải

Ta áp dụng phương pháp phân tích thành nhân tử :

Câu a:

$$TS=x^{100}-...-x^2+x^2-2x+1=(x-1)\left(x^{99}+x^{98}+x^{97}+...+x^2\right)+(x-1)^2$$

$$= (x-1)\left(x^{99}+x^{98}+\ldots+x^2+x-1\right)$$

Tương tự ta có: $MS = (x-1)\left(x^{49}+x^{48}+\ldots+x^2+x-1\right)$

Do đó TS/MS khi $x \to 1$ có giá trị là $98/48 = 49/24$
Câu b : Khái quát hơn câu a

$$\text{TS} = (x-a)\left(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+a^{n-2}\cdot x+a^{n-1}\right) - na^{n-1}(x-a)$$

$$\text{MS} = (x-a)^2$$

$$\Rightarrow \text{ TS/MS khi } x \to 1 \text{ có giá trị là } \frac{(n-1)n}{2}\cdot a^{n-2}$$

Ví dụ 4. Áp dụng phương pháp nhân liên hợp, tính giới hạn

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2-1}-x\right)$$

Lời giải

Đây là dạng $\infty-\infty$. Ta sử dụng phương pháp nhân liên hợp, sẽ có :

$$\left(\sqrt[3]{x^3+x^2-1}-x\right) = \frac{x^3+x^2-1-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+x^2-1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2-1}+x^2}$$

Nên ta có :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2-1}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{(x^3+x^2-1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2-1}+x^2} = \frac{1}{3}$$

- **Nguyên lý kẹp:** Nếu $f(x) \le g(x) \le h(x)$ trong một lân cận nào đó của a và tồn tại các giới hạn $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$. Khi đó tồn tại $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, và

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

3 Giới hạn của hàm hợp

Nếu có $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = u_o$, $\lim\limits_{u\to u_o} f(u) = f(u_o)$ và có hàm hợp $f(u(x))$ thì:

$$\lim_{x\to x_0} f(u(x)) = f(u_0)$$

Áp dụng:

$$\lim_{x\to x_0} A(x)^{B(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} B(x)\ln A(x)}$$

4 Vô cùng bé, vô cùng lớn

4.1 Định nghĩa

- Hàm $f(x)$ được gọi là vô cùng bé (VCB) khi $x \to a$ (a hữu hạn hoặc vô cùng) nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.
- Hàm $f(x)$ được gọi là vô cùng lớn (VCL) khi $x \to a$ (a hữu hạn hoặc vô cùng) nếu $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = +\infty$.

Chú ý 2. Khi nói một hàm số là VCB hoặc VCL, cần nói rõ x dần tới đâu.

4.2 So sánh các VCB, VCL

4.2.1. So sánh các VCB

Cho 2 vô cùng bé $f(x), g(x)$ khi $x \to x_0$. Xét giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$:

- Nếu $L = 0$, ta nói $f(x)$ là VCB bậc cao hơn $g(x)$ khi $x \to x_0$. Kí hiệu: $f(x) = o(g(x))(x \to x_0)$
- Nếu $L = k, k \neq 0$, ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là 2 VCB cùng bậc khi $x \to x_0$.
  Đặc biệt, $k = 1$, ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là 2 VCB tương đương khi $x \to x_0$.
  Kí hiệu: $f(x) \sim g(x)(x \to x_0)$
- Nếu $L = \infty$, ta nói $f(x)$ là VCB bậc thấp hơn $g(x)$ khi $x \to x_0$.

- Một số VCB tương đương hay dùng khi $x \to 0$

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \frac{a^x - 1}{\ln a} \sim \ln(1+x)$$

$$(1+x)^a - 1 \sim ax$$

Đặc biệt,

$$\sqrt[m]{1+\alpha x} - 1 \sim \frac{\alpha x}{m}$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

Ví dụ 5. Khi $x \to 0$, ta có $x^2 + x$ là một VCB tương đương với x. Ta có $x^2 + x \sim x$ khi $x \to 0$

Ví dụ 6. So sánh các cặp vô cùng bé sau :
a) $a(x) = x + x^2$ và $b(x) = \ln(1+x)$ khi x $\to 0$
b) $a(x) = \tan x - \sin x$ và $b(x) = \dfrac{1}{3}\arctan(x^2)$ khi x $\to 0$

Lời giải

a) Khi $x \to 0$:

$$a(x) = x + x^2 \sim x$$

$$b(x) = \ln(1+x) \sim x$$

Do đó $a(x)$, $b(x)$ là hai VCB cùng bậc

b) Khi $x \to 0$:

$$a(x) = \tan x - \sin x = \tan x(1-\cos x) \sim x.\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^3$$
$$b(x) = \frac{1}{3}\arctan(x^2) \sim \frac{1}{3}x^2$$

$\to \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{\frac{1}{3}\arctan(x^2)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{2}x^3}{\frac{1}{3}x^2} = 0$

Do đó $a(x)$ là VCB bậc cao hơn $b(x)$.

4.2.2. So sánh các VCL

Cho 2 vô cùng lớn $f(x), g(x)$ khi $x \to x_0$. Xét giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$:

- Nếu $L = 0$, ta nói $f(x)$ là VCL bậc thấp hơn $g(x)$ khi $x \to x_0$.
- Nếu $L = k, k \neq 0$, ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là 2 VCL cùng bậc khi $x \to x_0$.
  Đặc biệt, $k = 1$, ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là 2 VCL tương đương khi $x \to x_0$.
  Kí hiệu: $f(x) \sim g(x)(x \to x_0)$
- Nếu $L = \infty$, ta nói $f(x)$ là VCL bậc cao hơn $g(x)$ khi $x \to x_0$.

Ví dụ 7. Khi $x \to +\infty$, ta có $x^2 + x$ là một VCL tương đương với x^2.

4.3 Quy tắc thay VCB,VCL tương đương

Nếu $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x), \beta_1(x) \sim \beta_2(x)$ khi $x \to a$ thì:

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}, \lim_{x\to a} \alpha_1(x)\gamma(x) = \lim_{x\to a} \alpha_2(x)\gamma(x).$$

Ví dụ 8. Tính $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\arctan(3x)}$.

Lời giải

Khi $x \to 0$, $\sin(2x) \sim 2x$, $\arctan(3x) \sim 3x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\arctan(3x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{3x} = \dfrac{2}{3}$

Ví dụ 9. Áp dụng VCL VCB để giải bài tập tính giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[k]{1+\beta x}}{x} \left(\dfrac{0}{0}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+\alpha x} \cdot \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x} \left(\dfrac{0}{0}\right)$

Lời giải

a) Ta có :

$$\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}=\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}-\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$$

Mà cũng có các VCB tương đương khi $x \to 0$:

$$\sqrt[m]{1+\alpha x}-1 \sim \frac{\alpha}{m}x,\ \sqrt[n]{1+\beta x}-1 \sim \frac{\beta}{n}x$$

Do đó nên suy ra được giới hạn cần tìm là :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}$$

b) Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}+\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}\right)=\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}$$

Chú ý 3. Không được thay thế tương đương trong tổng hoặc hiệu.

4.4 Quy tắc ngắt bỏ VCB bậc cao, VCL bậc thấp

Quy tắc ngắt bỏ VCB bậc cao Nếu $\alpha_1(x)=o(\alpha_2(x)), \beta_1(x)=o(\beta_2(x))$ khi $x\to a$ thì:

$$\alpha_1(x)+\alpha_2(x)\sim\alpha_2(x) \text{ và } \lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)+\alpha_2(x)}{\beta_1(x)+\beta_2(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}.$$

Quy tắc ngắt bỏ VCL bậc thấp Nếu $\alpha_1(x)$ là VCL bậc cao hơn $\alpha_2(x)$ và $\beta_1(x)$ là VCL bậc cao hơn $\beta_2(x)$ khi $x\to a$ thì:

$$\alpha_1(x)+\alpha_2(x)\sim\alpha_1(x) \text{ và } \lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)+\alpha_2(x)}{\beta_1(x)+\beta_2(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

Ví dụ 10. Tính $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin(2x))+x^3}{\arctan(3x)+x^4}$.

Lời giải

Khi $x\to 0$

$$\ln(1+\sin(2x))\sim\sin(2x)\sim 2x,\ \ln(1+\sin(2x))+x^3\sim 2x$$
$$\arctan(3x)\sim 3x,\ \arctan(3x)+x^4\sim 3x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin(2x))+x^3}{\arctan(3x)+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$$

HÀM SỐ LIÊN TỤC

1 Định nghĩa

▶ Cho hàm số $f(x)$ xác định trong $(a;b)$, nói rằng $f(x)$ liên tục tại $x_0 \in (a;b)$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$*$ **Lưu ý:** điểm x_0 nhất thiết phải thuộc miền xác định của $f(x)$

▶ Như vậy $f(x)$ xác định liên tục trong khoảng $(a;b)$ nếu $f(x)$ liên tục tại mọi điểm $x \in (a;b)$

2 Định lý

Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số liên tục trong khoảng $(a;b)$, khi đó:

- $f(x)+g(x)$ liên tục trong khoảng $(a;b)$
- $f(x).g(x)$ liên tục trong khoảng $(a;b)$
  Đặc biệt : $Cf(x)$ (C là hằng số) liên tục trong khoảng $(a;b)$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục trong khoảng $(a;b)$ trừ ra những điểm x làm $g(x)=0$

Chú ý 1. Mọi hàm số sơ cấp liên tục trên các khoảng mà hàm số đó xác định. Như vậy: Các đa thức là các hàm số liên tục; phân thức hữu tỉ là các hàm số liên tục trừ các điểm làm cho đa thức mẫu số bằng 0; các hàm lượng giác liên tục trong miền xác định của nó.

Ví dụ 1. Xác định giá trị của a để hàm số sau liên tục tại $x=0$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2}, & \text{nếu } x \neq 0 \\ a, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2 \dfrac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2.\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

Hàm số đã cho liên tục tại $x=0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = a$.

Điều này tương đương với $a = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $a = \dfrac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

3 Tính chất của hàm liên tục

Định lí 3.1 Nếu hàm $u = \varphi(x)$ liên tục tại x_0 , hàm $y = f(u)$ liên tục tại $u_0 = \varphi(x_0)$ thì hàm hợp $y = (f \circ u)(x) = f[\varphi(x)]$ liên tục tại x_0.

Định lí 3.2 Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì nó bị chặn trên đoạn đó, đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất; lấy mọi giá trị trung gian giữa các giá tị nhỏ, lấn nhất đó.

Ta kí hiệu, giá trị nhỏ nhất (GTNN), giá tị lớn nhất (GTLN) là

$$\min_{a\le x\le b} f = m;\ \max_{a\le x\le b} f = M$$

Từ đó có hệ quả:

Hệ quả. Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì:

a) Phương trình $f(x)=0$ có nghiệm nếu $f(a)f(b)<0$;

b) Phương trình $f(x)=k$ có nghiệm khi $min\ f \le k \le\ maxf$;

c) Bất phương trình $f(x)\ge k$ có nghiệm thì $max\ f \ge k$;

d) Bất phương trình $f(x)\ge k$ có nghiệm $\forall x\in[a;b]$ khi $min\ f \ge k$

4 Sự liên tục đều

Định nghĩa. Hàm $f(x)$ là liên tục đều trong X nếu $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall u,\forall v\in X$ thỏa mãn $|u-v|<\delta$ thì $|f(u)-f(v)|<\varepsilon$.

Định lí . Cho một hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$, khi đó f liên tục đều trên $[a;b]$

Ví dụ 2. Các hàm số sau đây có liên tục đều trên miền đã cho không?

a) $y=\dfrac{x}{4-x^2};\ -1\le x\le 1$ b) $y=\ln x;\ 0<x<1$

Lời giải

a)

Nhận xét: tập số thực $D=[-1;1]$ là tập compact và hàm số $y=\dfrac{x}{4-x^2}$ liên tục trên tập D.

Do đó hàm số đã cho liên tục đều trên $[-1;1]$.

b)

Xét 2 dãy số $x_n=\dfrac{1}{n+1}$ và $y_n=\dfrac{1}{2n+2}$, dễ thấy $0<x_n,y_n<1\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$

Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}|x_n-y_n|=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{2n+2}\right|=0.$

Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty}|f(x_n)-f(y_n)|=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\ln\dfrac{1}{n+1}-\ln\dfrac{1}{2n+2}\right|=\ln 2\ne 0.$

Do đó hàm số đã cho không liên tục đều trên $(0;1)$.

5 Điểm gián đoạn hàm số

5.1 Định nghĩa

Hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm x_0 được gọi là điểm gián đoạn tại điểm đó. Vậy x_0 là điểm gián đoạn của $f(x)$ nếu:

(i) x_0 không thuộc miền xác định của $f(x)$ hoặc

(ii) x_0 thuộc miền xác định của $f(x)$ nhưng $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ne f(x_0)$ hay không tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

5.2 Phân loại điểm gián đoạn

(i) Điểm gián đoạn bỏ loại I

Điểm x_0 được gọi là điểm gián đoạn loại 1 của hàm số f nếu $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ tồn tại hữu hạn. Khi đó, nếu:

- $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$

  Thì $\left|\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\right|$ được gọi là bước nhảy của f tại x_0.

- $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$

  Thì x_0 còn được gọi là điểm gián đoạn bỏ được của hàm số.

(ii) Điểm gián đoạn loại II

Điểm x_0 được gọi là điểm gián đoạn loại 2 của hàm số f nếu ít nhất một trong hai giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ không tồn tại hữu hạn hoặc không tồn tại.

Ví dụ 3. Tìm và phân loại điểm gián đoạn của hàm số $y = \arctan\dfrac{1}{x}$

Lời giải

+) Hàm số xác định khi $x \neq 0 \to x = 0$ là điểm gián đoạn của hàm số.

+) Xét các giới hạn:

$\lim\limits_{x\to 0^+} \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ (vì $x \to 0^+ \Rightarrow \dfrac{1}{x} \to +\infty \Rightarrow \arctan\dfrac{1}{x} \to \dfrac{\pi}{2}$)

$\lim\limits_{x\to 0^-} \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{-\pi}{2}$ (vì $x \to 0^- \Rightarrow \dfrac{1}{x} \to -\infty \Rightarrow \arctan\dfrac{1}{x} \to \dfrac{-\pi}{2}$)

+) Hai giới hạn trên hữu hạn, $\left(\lim\limits_{x\to 0^+} \arctan\dfrac{1}{x} \neq \lim\limits_{x\to 0^-} \arctan\dfrac{1}{x}\right)$ nên $x = 0$ là điểm gián đoạn loại 1 của hàm số đã cho.

Vậy x = 0 là điểm gián đoạn loại 1 của hàm số.

Ví dụ 4. Tìm và phân loại điểm gián đoạn của hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{khi } x \leq 0 \\ x^2 - 1, & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

Lời giải

*Ta có: $x = 0$ là điểm gián đoạn của hàm số vì:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x+1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x^2-1) = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

*Mà $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) (1 \neq -1) \Rightarrow x = 0$ là điểm gián đoạn loại 1.

Vậy $x = 0$ là điểm gián đoạn loại 1 của hàm số.

Ví dụ 5. Tìm và phân loại điểm gián đoạn của hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{khi } x \neq 0 \\ 0, & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

Lời giải

*Ta có: $x = 0$ là điểm gián đoạn của hàm số vì:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \\ f(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$$

*Mà $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow x = 0$ là điểm gián đoạn loại 1 bỏ được.

Vậy $x = 0$ là điểm gián đoạn loại 1 bỏ được của hàm số.

- Một vài ví dụ nhắc lại kiến thức buổi trước:

Ví dụ 1. Tìm a để hàm số liên tục tại $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x + \tan x^2 + x \arcsin x}{\arctan 3x + \ln(1 + x^2)}, x \neq 0 \\ a,\ x = 0 \end{cases}$$

Lời giải:

Khi $x \to 0$ thì:

$$\begin{aligned} \sin 2x &\sim 2x; \\ \tan x^2 &\sim x^2; \\ x \arcsin x &\sim x^2; \\ \arctan 3x &\sim 3x; \\ \ln(1 + x^2) &\sim x^2; \end{aligned}$$

$\rightarrow \sin 2x + \tan(x^2) + x \arcsin x \sim 2x$

$\arctan 3x + \ln(1 + x^2) \sim 3x$

$\rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x + \tan x^2 + x \arcsin x}{\arctan 3x + \ln(1 + x^2)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{3x} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow a = \dfrac{2}{3}$

Ví dụ 2. Tìm và phân loại điểm gián đoạn của hàm số $f(x) = \dfrac{x}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$

- $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow$ hàm số đã cho gián đoạn tại x = 2
- $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x}{x^3 - 2x^2 + x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x}{(x-2)(x^2+1)} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x}{x^3 - 2x^2 + x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x}{(x-2)(x^2+1)} = -\infty$
- Vậy $x = 2$ là điểm gián đoạn loại 2.

1 Đạo hàm - vi phân

1.1 Khái niệm đạo hàm

- Giới hạn, nếu có, của tỉ số $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ được gọi là đạo hàm của hàm $f(x)$ tại x_0 (Kí hiệu $f'(x_0)$)
- $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ được gọi là đạo hàm phải của hàm $f(x)$ tại x_0 nếu giới hạn tồn tại (Kí hiệu $f'(x_0^+)$)
- $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ được gọi là đạo hàm trái của hàm $f(x)$ tại x_0 nếu giới hạn tồn tại (Kí hiệu $f'(x_0^-)$)

Kết luận:

- Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0, khi và chỉ khi $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$
- Nếu tồn tại $f'(x_0)$ thì $f(x)$ liên tục tại x_0

Tính khả vi: Trong khuôn khổ hàm 1 biến số. Hàm số có đạo hàm tại $x = x_0$ khi và chỉ khi nó khả vi tại $x = x_0$

Ví dụ 3. (GK - 20191) Cho $y = |x-1|$. Xét tính khả vi tại $x = 1$.

Ta có:
+) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{x-1} = 1$
+) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1-x}{x-1} = -1$
Do vậy f không khả vi tại $x = 1$.

Ví dụ 4. (GK - 20193) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{1}{|x|}\right), x \neq 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, \; x = 0 \end{cases}$

Xét tính khả vi của hàm số tại $x = 0$
Ta có:

+) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{\pi}{2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{1} = -1$

+) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\arctan\left(\dfrac{1}{-x}\right) - \dfrac{\pi}{2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{(-x)^2}}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}{1} = 1$

Do vậy f không khả vi tại 0 .

Ví dụ 5. (GK - 20181) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \ln(x+e^x), x > 0 \\ 0, \; x = 0 \end{cases}$

Tính $f'_+(0)$
Theo định nghĩa, ta có

$$f'\left(0^+\right) = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{\ln\left(e^{\Delta x}+\Delta x\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} = 1$$

1.2 Các phép toán

- $(u \pm v)'(x_0) = u'(x_0) \pm v'(x_0)$
- $(uv)'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)'(x_0) = \dfrac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)} \quad (v(x_0) \neq 0)$

1.3 Đạo hàm của hàm hợp, hàm ngược

- Hàm hợp: $F = f \circ u \Rightarrow F'(x) = f'(u(x))u'(x)$

Ví dụ 6. Tính đạo hàm của $y = \ln(x + \sqrt{x^2+4})$

- Hàm ngược:

$$\begin{cases} x = \varphi(y) \text{ có đạo hàm tại } y_0 \text{ và } \varphi'(y_0) \neq 0 \\ x = \varphi(y) \text{ có hàm ngược } y = f(x) \text{ liên tục tại } x_0 \end{cases} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{1}{\varphi'(y_0)}$$

Ví dụ 7. Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x + 5$, có hàm ngược là g. Tính $g'(9)$

Ta có:

$f(x_0) = 9 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow g'(9) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{6}$

1.4 Vi phân và ứng dụng

- **Vi phân**: $df(x) = f'(x)\,dx$

Ví dụ 8. Tìm vi phân của hàm số:

a) $y = \frac{2x^2-3x+1}{x^2+x+1}$

b) $y = \sin x \cos \frac{x}{2}$

c) $y = x \sin x - \cos x$

Lời giải:

a) Ta có: $y' = f'(x) = \dfrac{(2x^2-3x+1)'(x^2+x+1) - (x^2+x+1)'(2x^2-3x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{5x^2+2x-4}{(x^2+x+1)^2}$

suy ra $dy = f'(x)dx = \dfrac{5x^2+2x-4}{(x^2+x+1)^2}dx$

b) Ta có: $y' = \left(\sin x \cos \dfrac{x}{2}\right)' = (\sin x)' \cos \dfrac{x}{2} + \sin x \left(\cos \dfrac{x}{2}\right)' = \cos x \cdot \cos \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2} \sin x . \sin \dfrac{x}{2}$

Suy ra $dy = y'.dx = \left(\cos x \cdot \cos \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2} \sin x . \sin \dfrac{x}{2}\right) dx.$

c) Ta có: $y' = (x \sin x - \cos x)' = (x \sin x)' - (\cos x)' = \sin x + x \cos x + \sin x = 2 \sin x + x \cos x.$

Suy ra $dy = y'.dx = (2 \sin x + x \cos x)dx.$

- **Ứng dụng vi phân để tính gần đúng**: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

Ví dụ 9. Tính gần đúng giá trị của các biểu thức:

a) $\sqrt{16.25}$

b) $\cos 30°15'$

c) $\sqrt[4]{\dfrac{2}{2+0,02}}$

Lời giải:

a) Ta có $\sqrt{16,25} = \sqrt{16+0,25}$. Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
Chọn $x_0 = 16$ và $\Delta x = 0,25$, ta có $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$
$\Rightarrow \sqrt{16+0,25} \approx \sqrt{16} + \dfrac{1}{2\sqrt{16}} \cdot 0,25 = 4 + 0,03125 = 4,03125 \Rightarrow \sqrt{16+0,25} \approx 4,0313$

b) Ta có $\cos 30°15' = \cos(30° + 15') = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{720}\right)$
Xét hàm số $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$.
Chọn $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$ và $\Delta x = \dfrac{\pi}{720}$, ta có $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$.
$\Rightarrow \cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{720}\right) \approx \cos\dfrac{\pi}{6} - \sin\dfrac{\pi}{6} \cdot \dfrac{\pi}{720} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{1440} \approx 0,8638$

c) Xét $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{2}{2+x}}$, $x_0 = 0, \Delta x = 0,02$

$\Rightarrow \sqrt[4]{\dfrac{2}{2+0,02}} \approx f(0) + f'(0)\Delta x$

$f(0) = 1,\ f'(x) = \dfrac{1}{4}.\left(\dfrac{2}{2+x}\right)^{\frac{-3}{4}}.\dfrac{-2}{(2+x)^2}$

$\Rightarrow f'(0) = \dfrac{-1}{8}$

$\Rightarrow \sqrt[4]{\dfrac{2}{2+0.02}} \approx 1 - \dfrac{1}{8}.0,02 = 0,9975$

1.5 Đạo hàm, vi phân cấp cao

a) Đạo hàm cấp cao

Đạo hàm, nếu có cấp n của $f(x)$ kí hiệu là: $f^{(n)}(x)$
Tính chất:

- $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$
- Công thức Leibniz: $(u.v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot u^{(n-k)} v^{(k)}$

b) Đạo hàm cấp cao của một số hàm số cơ bản

- $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$
- $[(1+x)^\alpha]^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\cdot(1+x)^{\alpha-n}$
- $\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)^{(n)} \cdot \dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$
- $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$
- $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$
- $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

- $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot (\ln a)^n$
- $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{(n-1)!}{x^n}$

c) Vi phân cấp cao

Biểu thức của vi phân cấp cao:

Nếu x là biến số độc lập thì

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x) dx^n.$$

Vi phân cấp cao không có tính chất bất biến đối với hàm hợp

Ví dụ 10. Tính đạo hàm
a) $f^{(50)}(x)$ với $f(x) = (2x^2 + x + 1)\, e^{5x+2}$
b) $f^{(100)}(x)$ vói $f(x) = x^2 \cos x$
c) $f^{(5)}(x)$ với $f(x) = \ln(2x^2 - x)$
Giải. Ta có:

$$f^{(50)}(x) = \sum_{k=0}^{50} C_{50}^k \left(2x^2 + x + 1\right)^{(k)} \left(e^{5x+2}\right)^{(50-k)}$$
$$= 5^{50}\left(2x^2 + x + 1\right) e^{5x+2} + 50.(4x+1).5^{49}.e^{5x+2} + 1225.4.5^{48} e^{5x+2}$$

b) $f^{(100)}(x)$ với $f(x) = x^2 \cos x$
Giải. Ta có:

$$f^{(100)}(x) = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^k \left(x^2\right)^{(k)} (\cos x)^{(100-k)}$$
$$= x^2 \cos\left(x + \frac{100\pi}{2}\right) + 100.2x.\cos\left(x + \frac{99\pi}{2}\right) + 4950.2.\cos\left(x + \frac{98\pi}{2}\right)$$
$$= x^2 \cos x + 200x \sin x - 9900 \cos x$$

c) $f^{(5)}(x)$ với $f(x) = \ln(2x^2 - x)$
Ta có :

$$f'(x) = \frac{4x-1}{2x^2 - x} = \frac{2}{2x-1} + \frac{1}{x}$$

$$f^{(5)}(x) = \left(\frac{2}{2x-1} + \frac{1}{x}\right)^{(4)} = 2.\frac{2^4 \cdot (-1)^4 \cdot 4!}{(2x-1)^5} + (-1)^4 \cdot \frac{4!}{x^5} = 24\left(\frac{32}{(2x-1)^5} + \frac{1}{x^5}\right)$$

Ví dụ 11. Tính các đạo hàm sau tại các điểm cho trước:
a) $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$. Tính $f^{(100)}(0)$
b) $y = \arcsin x$. Tính $y^{(99)}(0)$
Lời giải
a) $f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$. Tính $f^{(100)}(0)$
Giải. Ta có

$f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{2-(1-x)}{\sqrt{1-x}} = 2(1-x)^{-\frac{1}{2}} - (1-x)^{\frac{1}{2}}$

$f^{(100)}(x) = 2\left[(-1)^{100}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\dfrac{1}{2}-99\right)(1-x)^{-\frac{1}{2}-100}\right]$

$-\left[(-1)^{100}\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\dfrac{1}{2}-99\right)(1-x)^{\frac{1}{2}-100}\right]$

$= \dfrac{3.5\ldots199}{2^{99}}(1-x)^{-\frac{201}{2}} + \dfrac{3.5\ldots197}{2^{100}}(1-x)^{\frac{197}{2}}$

Do đó $f^{(100)}(0) = \dfrac{3.5\ldots197}{2^{100}}(199.2+1) = 399\dfrac{(197)!!}{2^{100}}$, trong đó

$$(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)\ldots5.3.1; (2n)!! = 2n(2n-2)\ldots6.4.2$$

b) $y = \arcsin x$. Tính $y^{(99)}(0)$ Ta có:

$$\begin{aligned}
&y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow (1-x^2)\,y' = \sqrt{1-x^2}\\
&\Rightarrow -2xy' + (1-x^2)\,y'' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -xy'\\
&\Leftrightarrow (1-x^2)\,y'' - xy' = 0
\end{aligned}$$

Do đó $\left((1-x^2)\,y'' - xy'\right)^{(n)} = 0$ và

$$\begin{aligned}
&(1-x^2)\,y^{(n+2)}(x) - n.2x.y^{(n+1)}(x) - n(n-1)y^{(n)}(x) - xy^{(n+1)}(x) - ny^{(n)}(x) = 0\\
&\Rightarrow y^{(n+2)}(0) = n^2y^{(n)}(0) \Rightarrow y^{(99)}(0) = 97^2y^{(97)}(0) = \ldots = (97.95\ldots3.1)^2y'(0) = (97!!)^2
\end{aligned}$$

2 Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

2.1 Các định lý về hàm khả vi

Định lý 7.1 (Định lý Fermat) .

Cho $f(x)$ liên tục trên khoảng (a,b), nếu hàm số đạt cực trị tại điểm $x_0 \in (a,b)$ và có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Định lý 7.2 (Định lý Rolle).

Nếu hàm số $f(x)$:
i) Liên tục trong khoảng đóng $[a,b]$,
ii) Có đạo hàm trong khoảng mở (a,b),
iii) thỏa mãn điều kiện $f(a) = f(b)$,
thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a,b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Định lý 7.3 (Định lý Lagrange).

Nếu hàm số $f(x)$:
i) Liên tục trong khoảng đóng $[a,b]$,

ii) Có đạo hàm trong khoảng mở (a, b),

thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Định lý 7.4 (Định lý Cauchy).

Nếu các hàm số $f(x), g(x)$ thỏa mãn các điều kiên:

i) Liên tục trong khoảng đóng $[a, b]$,

ii) Có đạo hàm trong khoảng mở (a, b),

iii) $g'(x)$ không triệt tiêu trong khoảng mở (a, b)

thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

2.2 Quy tắc L'Hospital

Giới hạn $I = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ở dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ hoặc $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Giả sử 2 hàm số $f(x)$, $g(x)$ có đạo hàm, $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a; b) \setminus x_0$ với $x_0 \in (a; b)$.

Nếu $\exists \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ thì $\lim\limits_{x \to x_)} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Ví dụ 12. Tính các giới hạn sau:

a) $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{x - \sin x} \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$L_1 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\tan x - x)'}{(x - \sin x)'} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{(1 - \cos x)\cos^2 x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)\cos^2 x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = 2$

Áp dụng quy tắc L'Hospital: $L = L_1 = 2$

b) $L = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x^2 - 1} \quad \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$L_1 = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(\ln x)'}{(x^2 - 1)^2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\frac{1}{x}}{2x} = \dfrac{1}{2}$

Áp dụng quy tắc L'Hospital: $L = L_1 = \dfrac{1}{2}$

Chú ý 1. Trong 1 số tình huống, nên kết hợp việc thay thế các VCB, VCL tương đương với quy tắc L'Hospital

Ví dụ 13. Tính $I = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{(e^{\tan x} - 1)\arcsin x \ln(1 + \sin x)}$

Khi $x \to 0$: $e^{\tan x} - 1 \sim \tan x \sim x$

$\arcsin x \sim x$

$\ln(1 + \sin x) \sim \sin x \sim x$

$\to I = \dfrac{x - \sin x}{x^3}$ có dạng $\dfrac{0}{0}$.

$I_1 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = \dfrac{1}{6}$

Áp dụng quy tắc L'Hospital: $I = I_1 = \dfrac{1}{6}$

Chú ý 2. Đối với các dạng vô định còn lại, vẫn dùng được quy tắc L'Hospital bằng cách đưa về các dạng $\dfrac{0}{0}$ hoặc $\dfrac{\infty}{\infty}$

Ví dụ 14. Tính $I = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{1}{x} \right)$.

Ta có: $I = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + x - e^x}{x(e^x - 1)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + x - e^x}{x^2}$ (Do $e^x - 1 \sim x(x \to 0)$) có dạng $\dfrac{0}{0}$

$I_1 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x - e^x)'}{(x^2)'} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - e^x}{2x} = \dfrac{-1}{2}$ (Do $e^x - 1 \sim x(x \to 0)$)

Theo quy tắc L' Hospiatl: $I = I_1 = \dfrac{-1}{2}$

Chú ý 3. Có thể áp dụng nhiều lần quy tắc L'Hospital

Ví dụ 15. Tính $I = \lim\limits_{x \to 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{e^x - 1 - x}}$ $\quad (1^\infty)$

Ta có: $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{e^x - 1 - x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \ln(1 + x^2)\frac{1}{e^x - 1 - x}}$ $J = \lim\limits_{x \to 0} \ln(1 + x^2)\frac{1}{e^x - 1 - x}$ có dạng $\dfrac{0}{0}$.

$J_1 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\ln(1 + x^2))'}{(e^x - 1 - x)'} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{(e^x - 1)(1 + x^2)}$ có dạng $\dfrac{0}{0}$

$\mathrm{J}_2 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2x)'}{((e^x - 1)(1 + x^2))'} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{e^x(1 + x^2) + (e^x - 1)2x} = 2.$

Theo quy tắc L'Hospital, ta có $J = J_1 = J_2 = 2$.

Nên $I = e^2$

2.3 Công thức khai triển Taylor, Maclaurin

- **Công thức Taylor:** $f(x) = f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o[(x - x_0)^n]$
- **Công thức Maclaurin**: $f(x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}x + ... + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$
- **Một số khai triển Maclaurin thường gặp:**

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

Ví dụ 16. Viết khai triển Maclaurin đến cấp 3 cho hàm số $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - 3x - 4}$

Giải

Khai triển Maclaurin của $f(x)$ tới x^3 là

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o\left(x^3\right)$$

Biến đổi $f(x) = \frac{-1}{5} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{x-4}$ rồi sử dụng công thức

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)}\Bigg|_{x=0} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}\Bigg|_{x=0} = \frac{(-1)^n n!}{a^{n+1}}$$

Khi đó ta được $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{8} - \frac{7x^2}{12} + \frac{25x^3}{128} + o\left(x^3\right)$

Ví dụ 17. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 + x^4}{x - \sin x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x} - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}}{\arcsin x^2 \ln(1 + x^2)}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 + x^4}\cos x}{x^3 \arctan(x^5)}$

KHẢO SÁT HÀM SỐ

1 Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$

Sơ đồ khảo sát:

- Tìm TXĐ của hàm số, nhận xét tính chẵn, lẻ, tính tuần hoàn của hàm số (nếu có).
- Xác định chiều biến thiên (tính đơn điệu)
- Tìm cực trị (nếu có)
- Xét tính lồi, lõm và các điểm uốn
  Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ trên (a, b). Khi đó, f lồi trên (a, b) khi và chỉ khi $f''(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$. Hàm số f được gọi là hàm số lõm nếu $-f$ là hàm số lồi
- Tìm các tiệm cận của hàm số Ta bổ sung khái niệm tiệm cận xiên:
  Đường thẳng $y = ax + b, a \neq 0$ được gọi là *tiệm cận xiên* của đồ thị hàm số f nếu:

  $$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax - b) = 0 \text{ hoặc } \lim_{x\to-\infty}(f(x) - ax - b) = 0$$

  Khi đó, các hệ số a, b được tính theo công thức:

  $$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - ax]$$

  hoặc

  $$a = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - ax]$$

- Lập bảng biến thiên
- Tìm một số điểm đặc biệt mà hàm số đi qua (ví dụ như giao điểm với các trục toạ độ...) và vẽ đồ thị của hàm số.

2 Khảo sát và vẽ đường cong cho dưới dạng tham số

Giả sử cần khảo sát và vẽ đường cong cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

- Tìm TXĐ, nhận xét tính chẵn lẻ, tuần hoàn của các hàm số $x(t), y(t)$ (nếu có)
- Xác định chiều biến thiên của các hàm số $x(t), y(t)$ theo biến t bằng cách xét dấu các đạo hàm của nó.
- Tìm các tiệm cận của đường cong:
  - Tiệm cận đứng: Nếu $\lim\limits_{t\to t_0(\infty)} y(t) = \infty$ và $\lim\limits_{t\to t_0(\infty)} x(t) = x_0$ thì $x = x_0$ là một tiệm cận đứng của đường cong

- Tiệm cận ngang: Nếu $\lim_{t\to t_0(\infty)} x(t) = \infty$ và $\lim_{t\to t_0(\infty)} y(t) = y_0$ thì $y = y_0$ là một đường tiệm cận ngang của đường cong
- Tiệm cận xiên: Nếu $\lim_{t\to t_0(\infty)} y(t) = \infty$ và $\lim_{t\to t_0(\infty)} x(t) = \infty$ thì đường cong có thể có tiệm cận xiên. Nếu:

$$a = \lim_{t\to t_0(\infty)} \frac{y(t)}{x(t)}, b = \lim_{t\to t_0(\infty)} [y(t) - ax(t)]$$

thì $y = ax + b$ là một tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

- Để vẽ đường cong được chính xác hơn, ta xác định tiếp tuyến của đường cong tại các điểm đặc biệt. Hệ số góc của tiếp tuyến đường cong tại mỗi điểm bằng

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

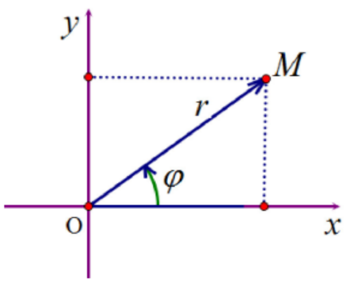
Ngoài ra có thể khảo sát tính lồi lõm và điểm uốn bằng cách tính đạo hàm cấp hai

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{y'_t}{x'_t})}{dx} = \frac{y''_t x'_t - y'_t x"t}{x'^3_t}$$

- Xác định một số điểm đặc biệt mà đồ thị đi qua và vẽ đồ thị hàm số

3 Khảo sát và vẽ đường cong trong hệ toạ độ cực

- Trong mặt phẳng, chọn 1 điểm O cố định làm *gốc cực* và một tia Ox là *trục cực*. Vị trí của mỗi điểm M trong mặt phẳng được xác định bởi vector $\vec{OM}$. Gọi $r = |\vec{OM}| \geq 0$ là bán kính cực và góc $\varphi = (Ox, \vec{OM}) \in [0, 2\pi)$ là góc cực. Cặp số (r, φ) được gọi là *toạ độ cực* của điểm M
$\rightarrow$ Toạ độ cực suy rộng: Ta mở rộng toạ độ cực cho trường hợp $r \in R, \varphi \in R$. Với $\varphi \in R$ thì ta hiểu đây là góc lượng giác, còn nếu $r < 0$ thì ta xác định điểm $M(r, \varphi)$ trùng với điểm $M(-r, \varphi + \pi)$



- Trong hệ trục toạ độ Đề - các vuông góc. Một điểm M trong mặt phẳng sẽ có toạ độ Đề - các $M(x, y)$ và toạ độ cực $M(r, \varphi)$. Công thức liên hệ giữa hai toạ độ là: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} (x \neq 0) \end{cases}$

Ví dụ 1: Tìm tiện cận của các đường cong sau

a) $y = \sqrt[3]{1 + x^3}$

b) $y = \ln(1 + e^{-x})$

c) $y = \dfrac{x^3 \operatorname{arccot} x}{1 + x^2}$

d) $\begin{cases} x &= 2t - t^2 \\ y &= \dfrac{2016t^2}{1 - t^3} \end{cases}$

e) $\begin{cases} x &= t \\ y &= t + 2\arctan t \end{cases}$

Lời giải:

a) $y = \sqrt[3]{1 + x^3}$
TXĐ $= \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.
Ta có:

+) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = 1$

$\Rightarrow$ Xét: $\lim\limits_{x\to+\infty} (y - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{1+x^3} - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{1+x^3}\right)^2 + x\sqrt[3]{1+x^3} + x^2} = 0$

$\Rightarrow$ Hàm số đã cho có một tiệm cận xiên là: $y = x$

+) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x} = 1$

$\Rightarrow$ Xét: $\lim\limits_{x\to-\infty} (y - x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{1+x^3} - x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{1+x^3}\right)^2 + x\sqrt[3]{1+x^3} + x^2} = 0$

$\Rightarrow$ Hàm số đã cho có một tiệm cận xiên là: $y = x$ (đã có)

Vậy hàm số đã cho có 1 tiệm cận xiên là $y = x$.

b) $y = \ln(1 + e^{-x})$
TXĐ $= \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.
Ta có:

+) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+e^{-x}))}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{x} = 0$

$\Rightarrow$ Xét: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1 + e^{-x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

$\Rightarrow$ Hàm số đã cho có một tiệm cận ngang là: $y = 0$

+) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(1+e^{-x}))}{x} = L$

Xét $L_1 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(\ln(1+e^{-x}))'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{e^x + 1} = -1$

$\Rightarrow$ Theo quy tắc L'Hospital, $L = L_1 = -1$

$\Rightarrow$ Xét: $\lim\limits_{x\to-\infty}(y+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln\left(1+e^{-x}\right)+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(e^{x}+1\right)=0$

$\Rightarrow$ Hàm số đã cho có một tiệm cận xiên là: $y=-x$

Vậy hàm số đã cho có 1 tiệm cận ngang $y=0$ và một tiệm cận xiên $y=-x$

c) $y=\dfrac{x^3\operatorname{arccot}x}{1+x^2}$

TXĐ $=\mathbb{R}\Rightarrow$ Hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.

Ta có:

+) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\operatorname{arccot}x}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}\operatorname{arccot}x=1\cdot 0=0$

$\Rightarrow$ Xét: $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3\operatorname{arccot}x}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3\arctan\frac{1}{x}}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1$

$\Rightarrow$ Hàm số đã cho có một tiệm cận ngang là: $y=1$

+) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\operatorname{arccot}x}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}\operatorname{arccot}x=1\cdot\pi=\pi$

$\Rightarrow$ Xét: $\lim\limits_{x\to-\infty}(y-\pi x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3\operatorname{arccot}x}{1+x^2}-\pi x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3(\pi-\arctan\frac{1}{x}-\pi)-\pi x}{1+x^2}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^2-\pi x}{1+x^2}=-1$

$\Rightarrow$ Hàm số đã cho có một tiệm cận xiên là: $y=\pi x-1$

Vậy hàm số đã cho có 1 tiệm cận ngang $y=1$ và một tiệm cận xiên $y=\pi x-1$

d) $\begin{cases} x &= 2t-t^2 \\ y &= \dfrac{2016t^2}{1-t^3}\end{cases}$

ĐKXĐ: $1-t^3\neq 0\Rightarrow t\neq 1$

Ta có:

+) $\lim\limits_{t\to1}x=\lim\limits_{t\to1}(2t-t^2)=1,\quad \lim\limits_{t\to1}y=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{2016t^2}{1-t^3}=\infty$

$\Rightarrow$ Hàm số có 1 tiệm cận đứng: $x=1$

+) $\lim\limits_{t\to+\infty}x=\lim\limits_{t\to+\infty}(2t-t^2)=-\infty,\quad \lim\limits_{t\to+\infty}y=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{2016t^2}{1-t^3}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{2016}{\frac{1}{t}-t}=0$

$\Rightarrow$ Hàm số có 1 tiệm cận ngang: $y=0$

+) $\lim\limits_{t\to-\infty}x=\lim\limits_{t\to\infty}(2t-t^2)=-\infty,\quad \lim\limits_{t\to-\infty}y=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{2016t^2}{1-t^3}=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{2016}{\frac{1}{t}-t}=0$

$\Rightarrow$ Hàm số có 1 tiệm cận ngang: $y=0$ (đã có)

Vậy hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng $x=1$ và một tiệm cận ngang $y=0$

e) $\begin{cases} x &= t \\ y &= t + 2\arctan t \end{cases}$

ĐKXĐ: $t \in \mathbb{R}$

Ta có:

+) $\lim\limits_{t\to+\infty} x = \lim\limits_{t\to+\infty} t = +\infty, \quad \lim\limits_{t\to+\infty} y = \lim\limits_{t\to+\infty} (t + 2\arctan t) = +\infty$

$\Rightarrow$ Xét $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t+\arctan t}{t} = 1$

$\Rightarrow$ Xét $\lim\limits_{t\to+\infty} (y - x) = \lim\limits_{t\to+\infty} (t + \arctan t - t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \arctan t = \dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ Hàm số có 1 tiệm cận xiên: $y = x + \dfrac{\pi}{2}$

+) $\lim\limits_{t\to-\infty} x = \lim\limits_{t\to-\infty} t = -\infty, \quad \lim\limits_{t\to-\infty} y = \lim\limits_{t\to-\infty} (t + 2\arctan t) = -\infty$

$\Rightarrow$ Xét $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{t+\arctan t}{t} = 1$

$\Rightarrow$ Xét $\lim\limits_{t\to-\infty} (y - x) = \lim\limits_{t\to-\infty} (t + \arctan t - t) = \lim\limits_{t\to-\infty} \arctan t = -\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ Hàm số có 1 tiệm cận xiên: $y = x - \dfrac{\pi}{2}$

Vậy hàm số đã cho có 2 tiệm cận xiên là $y = x + \dfrac{\pi}{2}$ và $y = x - \dfrac{\pi}{2}$

Ví dụ 2: Khảo sát các hàm số, đường cong sau

a) $y = e^{\frac{1}{x} - x}$

b) $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$

c) $\begin{cases} x &= \dfrac{2t}{1-t^2} \\ y &= \dfrac{t^2}{1+t} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x &= 2t - t^2 \\ y &= 3t - t^3 \end{cases}$

e) $r = a + b\cos\varphi, (0 < a \le b)$

f) $r = a\sin 3\varphi, (a > 0)$

Lời giải:

a) $y = e^{\frac{1}{x} - x}$

1) TXĐ $= \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Hàm số không chẵn, không lẻ, không tuần hoàn.

2) Xét $y' = \left(-\frac{1}{x^2} - 1\right) e^{\frac{1}{x}-x} = -\left(\frac{1}{x^2} + 1\right) e^{\frac{1}{x}-x} < 0 \forall x \in$ TXĐ.

$\Rightarrow$ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	‖	$-$
y	$+\infty \searrow 0$	‖	$+\infty \searrow 0$

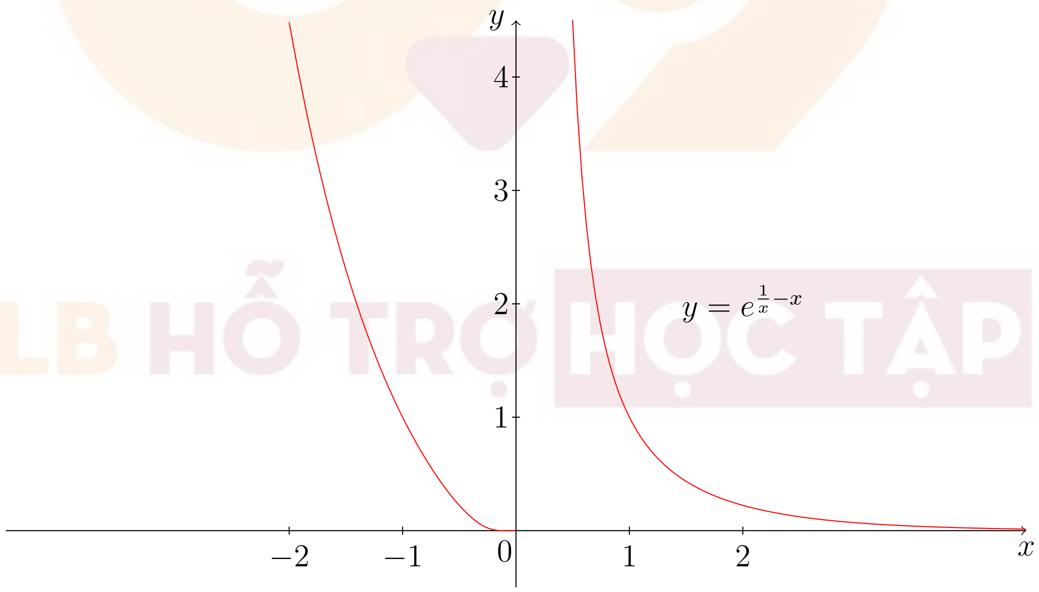
Hàm số không có cực trị và nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và $(0; \infty)$.

3) Hàm số có 1 tiệm cận đứng $x = 0$ và 1 tiệm cận ngang $y = 0$, không có tiệm cận xiên.

4) Bảng giá trị:

x	-2	-1	1	2
y	$e^{\frac{3}{2}}$	1	1	$e^{-\frac{3}{2}}$

5) Đồ thị hàm số:



b) $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$

1) TXĐ $= \mathbb{R}$

Hàm số không chẵn, không lẻ, không tuần hoàn.

2) Xét $y' = \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{3\left(\sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}\right)^2}$

$\Rightarrow y'$ không xác định $\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$. $\quad y' = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$.

$\Rightarrow$ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$-\dfrac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{\dfrac{32}{27}}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số có 3 điểm cực trị gồm 2 cực tiểu là $x = -1$ và $x = 1$ và 1 cực đại là $x = -\dfrac{1}{3}$

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và $\left(-\dfrac{1}{3}; 1\right)$ và đồng biến trên $\left(-1; -\dfrac{1}{3}\right)$ và $(1; \infty)$.

3) Hàm số không có tiệm cận ngang và tiệm cận đứng.

Xét: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}}{x} = 1$

Xét: $\lim\limits_{x\to\infty} (y - x) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1} - x\right)$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^2 - x + 1}{\left(\sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}\right)^2 + x\left(\sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}\right)x + x^2} = -\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow$ Hàm số có 1 tiệm cận xiên là $y = x - \dfrac{1}{3}$.

Tương tự khi $x \to -\infty$, ta được 1 tiệm cận xiên là: $y = x - \dfrac{1}{3}$.

Vậy hàm số có 1 tiệm cận xiên là $y = x - \dfrac{1}{3}$

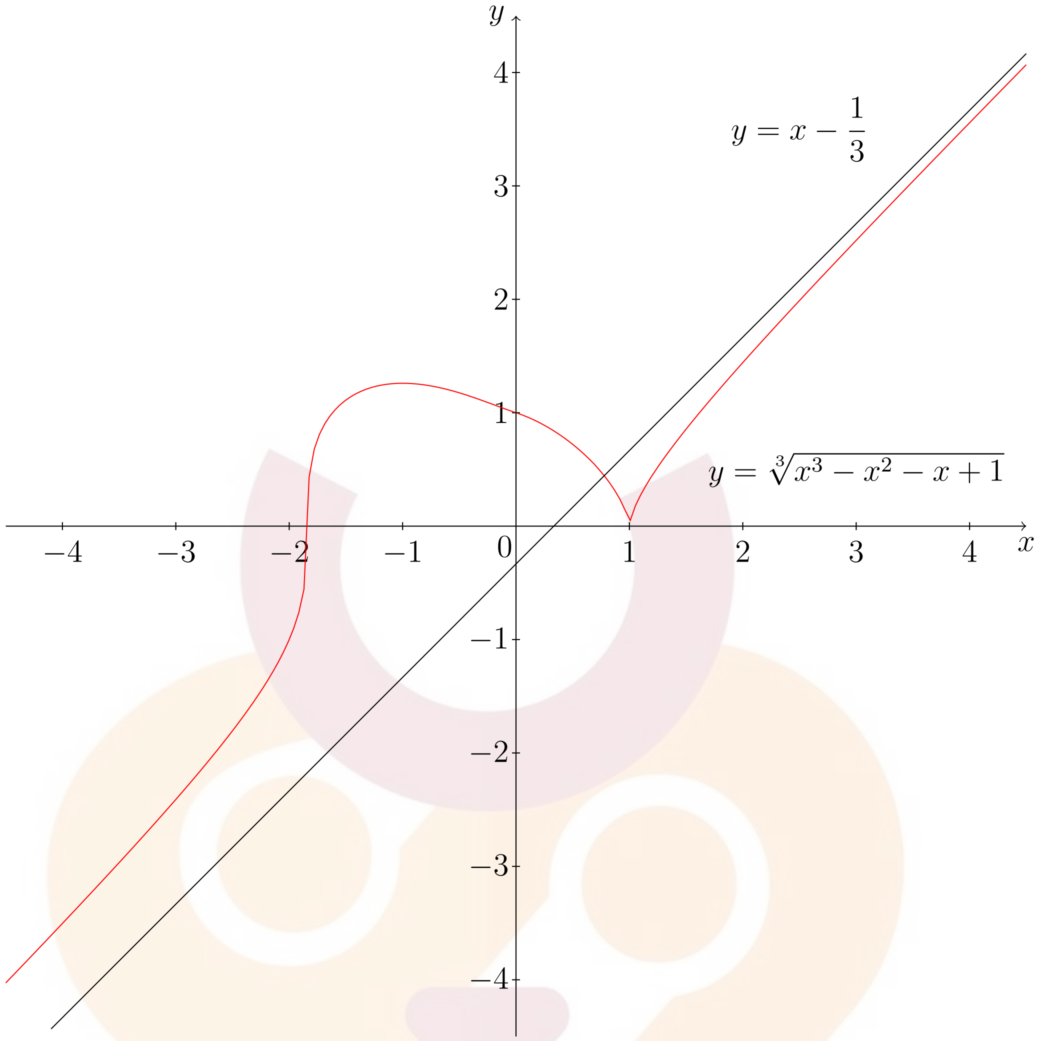
4) Xét phương trình $y = 0 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số cắt Ox tại 2 điểm $(-1; 0)$ và $(1; 0)$

Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm $(0; 1)$

Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
y	$-\sqrt[3]{9}$	0	1	0	$\sqrt[3]{3}$

5) Đồ thị hàm số:



c) $y = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$

1) TXĐ $= \mathbb{R}$
Hàm số không chẵn, không lẻ, không tuần hoàn.

2) Xét $y' = \dfrac{2x+1}{x^2+1}$
$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.
$\Rightarrow$ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	
y	-1	$\searrow$	$-\sqrt{5}$	$\nearrow$	1

Hàm số có 1 điểm cực tiểu là $x = -\dfrac{1}{2}$

Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ và đồng biến trên $\left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$.

3) Xét $y'' = 0 \Rightarrow \dfrac{-2x^2 - 2x + 2}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow -2x^2 - 2x + 2 = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (Đều là nghiệm đơn)

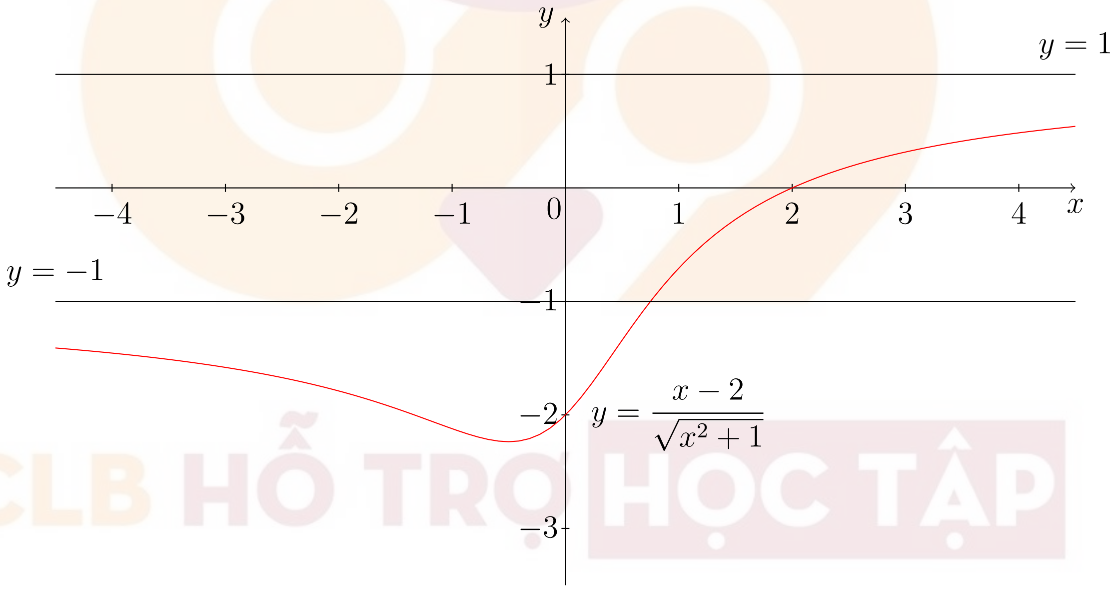
$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có 2 điểm uốn ứng với $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

4) Hàm số không có tiệm cận đứng, tiệm cận xiên và có 2 tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = -1$.

5) Xét phương trình $y = 0 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số cắt Ox tại 1 điểm $(2; 0)$
Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm $(0; -2)$
Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
y	$-\frac{4\sqrt{5}}{5}$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	-2	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

6) Đồ thị hàm số:



d) $\begin{cases} x &= 2t - t^2 \\ y &= 3t - t^3 \end{cases}$

1) ĐKXĐ: $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$
Hàm số $x(t)$ không chẵn, không lẻ, không tuần hoàn.
Hàm số $y(t)$ là hàm lẻ.

2) • Xét $x'_t = 2 - 2t$
$\Rightarrow x'_t = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
$\Rightarrow$ Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		1		$+\infty$
x'_t		$+$	0	$-$	
x	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $x(t)$ đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên $(1; \infty)$.

- Xét $y'_t = 3 - 3t^2$
  $\Rightarrow y'_t = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1.$
  $\Rightarrow$ Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'_t		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	∞	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

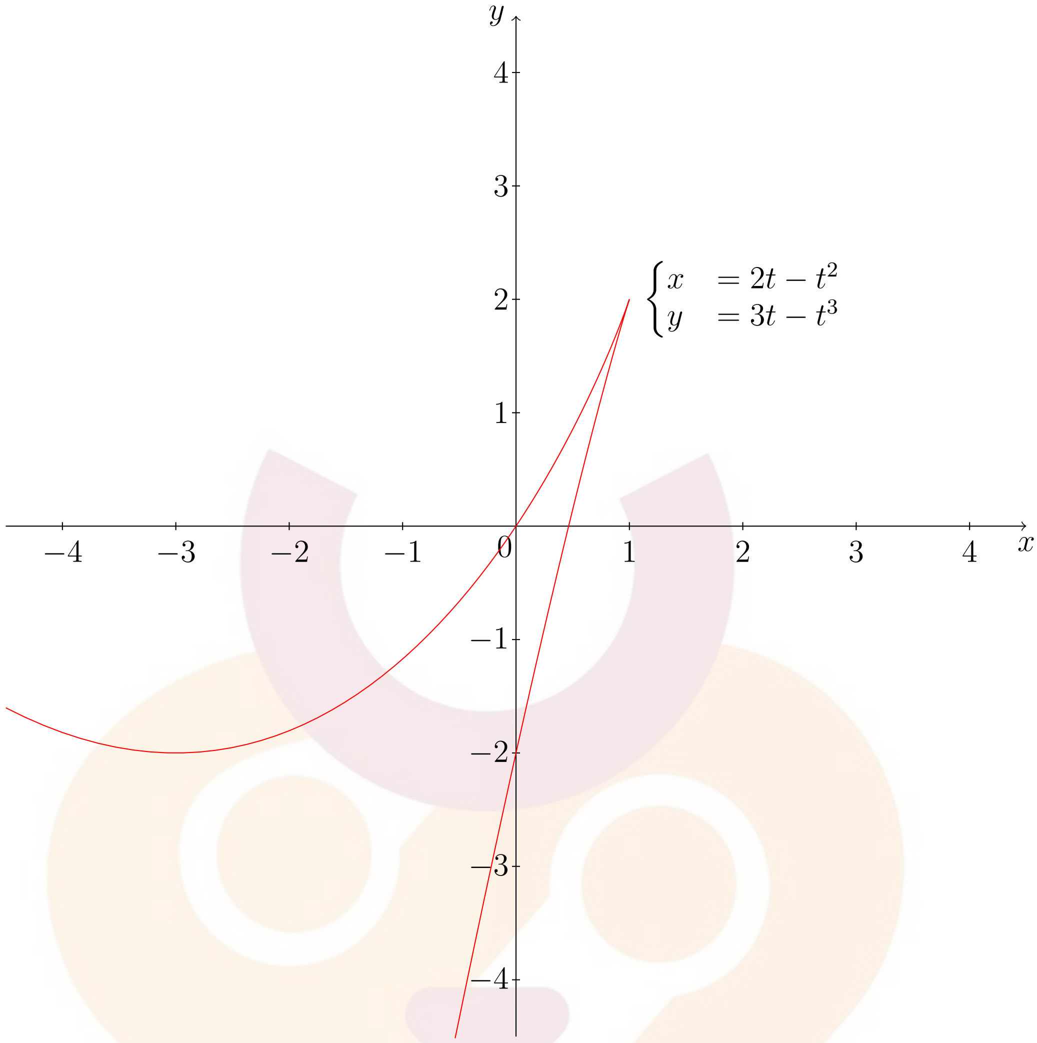
Hàm số $y(t)$ đồng biến trên $(-1; 1)$ và nghịch biến trên $(-\infty; -1)$, $(1; \infty)$.

3) Từ bảng biến thiên, đồ thị không có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang
   Xét $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{t \to \pm\infty} \dfrac{3t - t^3}{2t - t^2} = \infty$
   Vậy đồ thị không có tiệm cận xiên

4) Xét phương trình $y = 0 \Rightarrow t = 0 \vee t = \pm\sqrt{3}$. Đồ thị hàm số cắt Ox tại 1 điểm $(0; 0)$, $(0; \sqrt{3})$, $(0; -\sqrt{3})$
   Xét phương trình $x = 0 \Rightarrow t = 0 \vee t = 2$ Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm $(0; 0)$, $(2; 0)$
   Bảng giá trị:

t	-2	-1	0	1	2
x	-8	-3	0	1	0
y	-2	-2	0	2	-2

5) Đồ thị hàm số:



e) $r = a + b\cos\varphi, (0 < a \leq b)$

1) TXĐ $= \mathbb{R}$
Hàm số chẵn, tuần hoàn với chu kì $2\pi \Rightarrow$ Xét hàm số trên $[0; 2\pi]$.

2) Xét $r'_\varphi = -b\sin\varphi$
$\Rightarrow r' = 0 \Leftrightarrow \varphi = k\pi$ (với $k \in \mathbb{Z}$).
$\Rightarrow$ Bảng biến thiên trên $[0; 2\pi]$:

φ	0		π		2π
r'		$-$	0	$+$	
r	$a+b$	$\searrow$	$a-b$	$\nearrow$	$a+b$

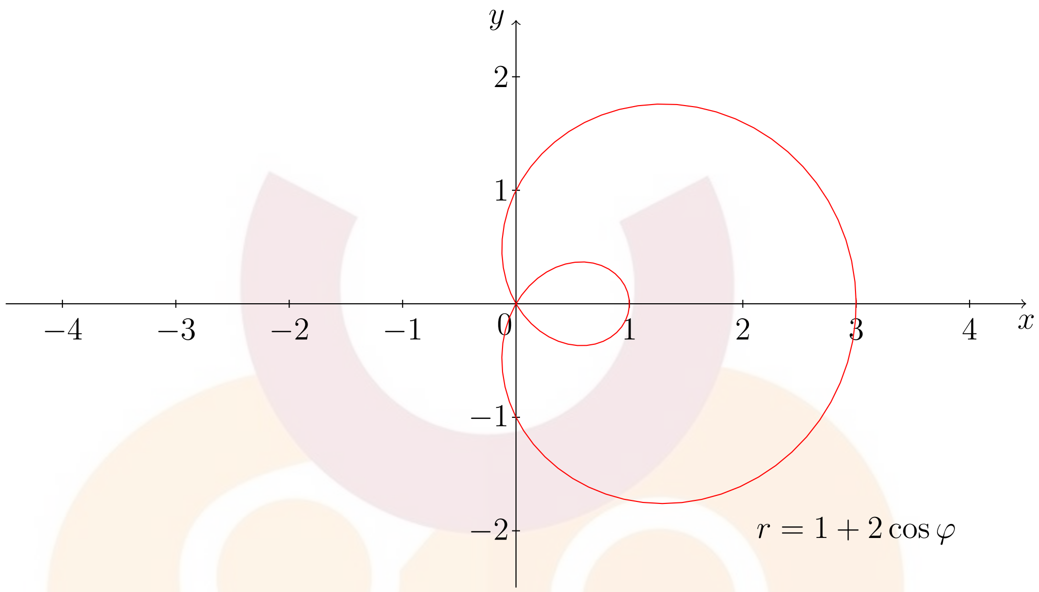
3) Do $a - b \leq r \leq a + b$ nên hàm số không có tiệm cận.

4) Xét $y = r\sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = k\pi \vee \varphi = \arccos\dfrac{-a}{b} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ Đồ thị hàm số cắt Ox tại nhiều nhất 3 điểm $(0; 0), (a + b; 0), (b - a; 0)$
Xét $x = r\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \vee \varphi = \arccos\dfrac{-a}{b} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ Đồ thị hàm số cắt Oy tại 3 điểm $(0; 0), (0; a), (0; -a)$

Bảng giá trị:

φ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
r	$a+b$	$a+\frac{b}{2}$	a	$a-\frac{b}{2}$	$a-b$

5) Đồ thị hàm số:



f) $r = a\sin 3\varphi, (a > 0)$

1) TXĐ $= \mathbb{R}$
Hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kì $\frac{2\pi}{3} \Rightarrow$ Xét hàm số trên $[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$.

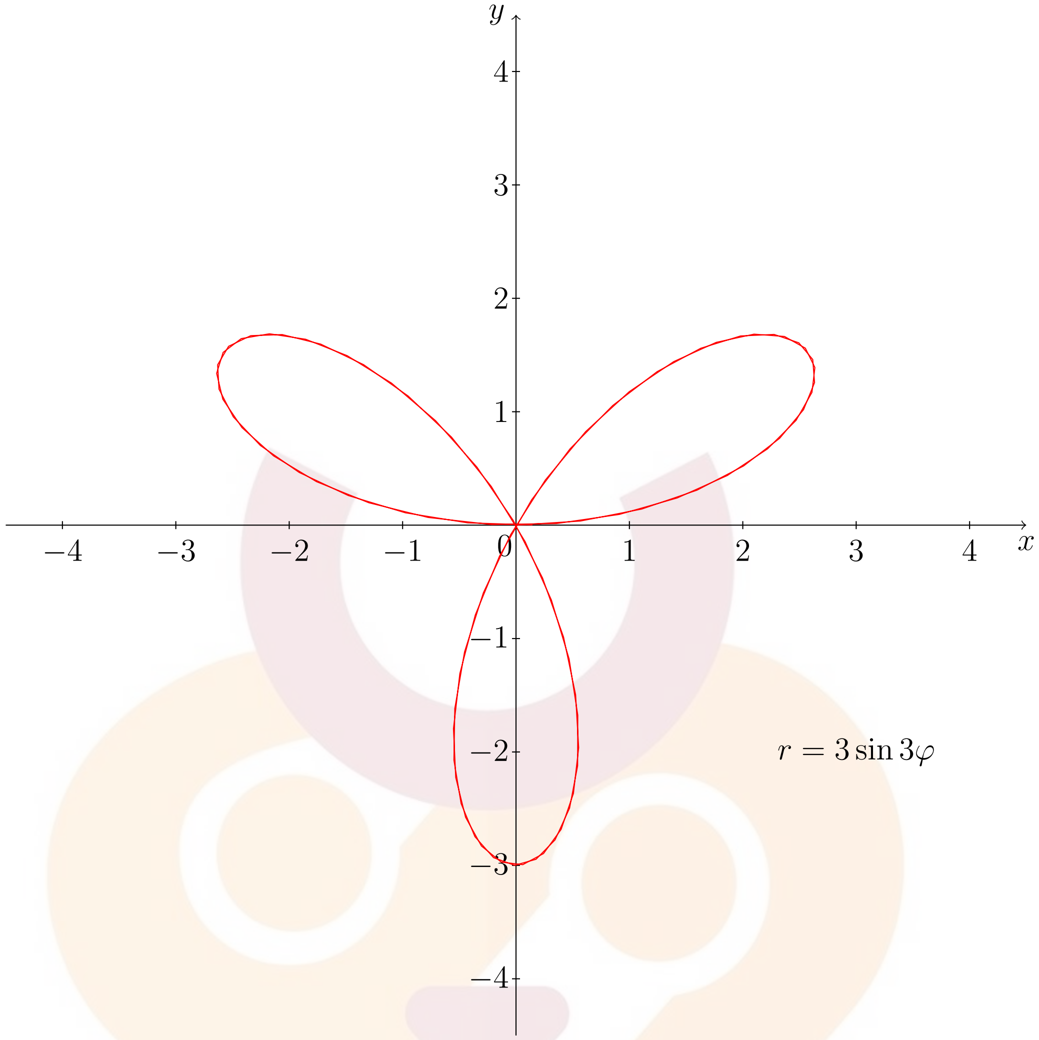
2) Xét $r'_\varphi = 3a\cos 3\varphi$
$\Rightarrow r' = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$ (với $k \in \mathbb{Z}$).
$\Rightarrow$ Bảng biến thiên trên $[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$:

φ	$-\frac{\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$
r'		$-$	0	$+$	0	$-$	
r	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3) Do $-a \le r \le a$ nên hàm số không có tiệm cận.

4) Xét $y = r\sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = k\pi \vee \varphi = k\frac{\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$ Đồ thị hàm số cắt Ox tại 1 điểm $(0; 0)$
Xét $x = r\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee \varphi = k\frac{\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$ Đồ thị hàm số cắt Oy tại 2 điểm $(0; 0), (0; -a)$

5) Đồ thị hàm số:


y
x
$r = 3\sin 3\varphi$