Chương 2
Phép tính tích phân hàm một biến số
2.1 Tích phân bất định
Bài 50: Tính các tích phân:

a) $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$

b) $\int (x+2) \ln x dx$

c) $\int |x^2 - 3x + 2| dx$

d) $\int \frac{x dx}{(x+2)(x+5)}$

e) $\int \frac{(x^2+2)dx}{x^3+1}$

f) $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$

g) $\int \sin 5x \cos 3x dx$

h) $\int \tan^3 x dx$

i) $\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x}$

j) $\int \frac{(3-2x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$

k) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+4x+5}}$

l) $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2-2x-1}}$

Lời giải:

a) $$\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx = \int e^{\sin^2 x} \cdot 2\sin x \cos x dx = \int e^{\sin^2 x} \cdot 2\sin x d(\sin x)$$
$$= \int e^{\sin^2 x} d(\sin^2 x) = e^{\sin^2 x} + C$$

b) $$\int (x+2)\ln x dx = \int \ln x d\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right) = \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\ln x - \int \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right) d(\ln x)$$
$$= \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\ln x - \int \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right) . \frac{1}{x} dx$$
$$= \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\ln x - \int \left(\frac{x}{2} + 2\right) dx$$
$$= \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\ln x - \frac{x^2}{4} - 2x + C$$

c) $$\int |x^2 - 3x + 2| dx = \begin{cases} \int (x^2 - 3x + 2) dx & \text{khi } x \le 1 \lor x \ge 2 \\ \int (-x^2 + 3x - 2) dx & \text{khi } 1 < x < 2 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + C & \text{khi } x \le 1 \lor x \ge 2 \\ -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x + C & \text{khi } 1 < x < 2 \end{cases}$$

d) $$\int \frac{x dx}{(x+2)(x+5)} = \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x+5} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x+2} = \frac{5}{3}\ln|x+5| - \frac{2}{3}\ln|x+2| + C$$

e) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^3+1}dx = \int \frac{x^2+2}{(x+1)(x^2-x+1)}dx = \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x^2-x+1}$

$$= \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \ln|x+1| + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctan\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C$$

$$= \ln|x+1| + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

f) $\displaystyle I = \int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$

- Với $a = b \Rightarrow I = \displaystyle\int \frac{dx}{(x+a)^4} = -\frac{1}{3(x+a)^3} + C$
- Với $a \neq b$, ta có:

$$I = \int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2} = \int \left[\frac{1}{(x+a)(x+b)}\right]^2 dx$$

$$= \int \left[\frac{(x+b)-(x+a)}{(x+a)(x+b)} \cdot \frac{1}{b-a}\right]^2 dx$$

$$= \frac{1}{(b-a)^2} \int \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{(b-a)^2} \left(\int \frac{dx}{(x+a)^2} + \int \frac{dx}{(x+b)^2} - 2\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}\right)$$

$$= \frac{1}{(b-a)^2} \left(\int \frac{dx}{(x+a)^2} + \int \frac{dx}{(x+b)^2} - \frac{2}{b-a}\left(\int \frac{dx}{x+a} - \int \frac{dx}{x+b}\right)\right)$$

$$= \frac{-1}{(b-a)^2}\left(\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b}\right) - \frac{2}{(b-a)^3} \ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| + C$$

g) $\displaystyle\int \sin 5x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 2x + \sin 8x) dx = -\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + C$

h) $\displaystyle\int \tan^3 x dx = \int \tan x \left(\tan^2 x + 1 - 1\right) dx = \int \tan x \left(\tan^2 x + 1\right) dx - \int \tan x dx$

$$= \int \tan x d(\tan x) - \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \int \tan x d(\tan x) + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x}$$

$$= \frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C$$

i) $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2+(-4)^2}\left(\frac{3}{5}\sin x + \frac{-4}{5}\cos x\right)}$

$$= \int \frac{dx}{5\sin(x+\alpha)} \quad \text{với } \alpha = \arctan\frac{-4}{3}$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{\sin(x+\alpha)dx}{\sin^2(x+\alpha)} = \frac{1}{5}\int \frac{d[\cos(x+\alpha)]}{\cos^2(x+\alpha)-1}$$

$$= \frac{1}{10}\ln\left|\frac{\cos(x+\alpha)-1}{\cos(x+\alpha)+1}\right| + C = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{3\cos x + 4\sin x - 5}{3\cos x + 4\sin x + 5}\right| + C$$

j) $\displaystyle\int \frac{(3-2x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = 3\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = 3\arcsin x + 2\sqrt{1-x^2} + C$

k) $\displaystyle I = \int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+4x+5}} = \int \frac{dx}{1+\sqrt{(x+2)^2+1}}$

Đặt $x+2 = \tan t$, $\left(\dfrac{-\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}$

$$\Rightarrow I = \int \frac{dt}{\left(1+\sqrt{\tan^2 t+1}\right)\cos^2 t} = \int \frac{dt}{\cos t(1+\cos t)}$$

$$= \int \frac{dt}{\cos t} - \int \frac{dt}{1+\cos t} = \int \frac{\cos t dt}{\cos^2 t} - \int \frac{dt}{2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$= \int \frac{d(\sin t)}{1-\sin^2 t} - \int \frac{d\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right| - \tan\left(\frac{t}{2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{1}{\cos t}+\tan t}{\frac{1}{\cos t}-\tan t}\right| - \frac{\frac{1}{\cos t}-1}{\tan t} \text{ do } \left(\tan\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{1-\cos t}{\sin t}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)}{\sqrt{x^2+4x+5}-(x+2)}\right| - \frac{\sqrt{x^2+4x+5}-1}{x+2} + C$$

$$= \ln\left(\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)\right) - \frac{\sqrt{x^2+4x+5}-1}{x+2} + C$$

l) $\displaystyle\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2-2x-1}} = \int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-1}}dx + \int \frac{2}{\sqrt{x^2-2x-1}}dx$

$$= \int \frac{d(x^2-2x-1)}{2\sqrt{x^2-2x-1}} + 2\int \frac{d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2-2}}$$

$$= \sqrt{x^2-2x-1} + 2\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}\right| + C$$

Bài 51: Tính các tích phân:

a) $\displaystyle\int \frac{x^4dx}{x^{10}-1}$

b) $\displaystyle\int x\sqrt{-x^2+3x-2}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}$

d) $\displaystyle\int \sin^{n-1}x\sin[(n+1)x]dx \quad (n\in\mathbb{N}^*)$

e) $\displaystyle\int e^{-2x}\cos 3xdx$

f) $\displaystyle\int \arcsin^2 xdx$

Lời giải:

a) $\displaystyle\int \frac{x^4dx}{x^{10}-1} = \frac{1}{5}\int \frac{dx^5}{(x^5)^2-1} = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{x^5-1}{x^5+1}\right| + C$

b) $I = \int x\sqrt{-x^2+3x-2}dx = \int x\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{3}{2}\right)^2}dx$

Đặt $x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sin t,\ \left(-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = \frac{1}{2}\cos tdt$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sin t\right)\cos^2 tdt = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\int\cos^2 tdt + \frac{1}{2}\int \sin t\cos^2 tdt\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\int(1+\cos 2t)dt - \frac{1}{2}\int\cos^2 td\cos t\right)$$

$$= \frac{3}{16}t + \frac{3}{32}\sin 2t - \frac{1}{24}\cos^3 t + C$$

$$= \frac{3}{16}\arcsin(2x-3) + \frac{3}{8}(2x-3)\sqrt{-x^2+3x-2} - \frac{1}{3}\left(\sqrt{-x^2+3x-2}\right)^3 + C$$

c) $I = \int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2} = \int \frac{dx}{((x+1)^2+2^2)^2}$

Đặt $x+1 = 2\tan t,\ \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = 2\left(\tan^2 t + 1\right)dt$

$$\Rightarrow I = \int \frac{2\left(1+\tan^2 t\right)dt}{4^2\left(1+\tan^2 t\right)^2} = \int \frac{dt}{8\left(1+\tan^2 t\right)}$$

$$= \frac{1}{8}\int\cos^2 tdt = \frac{1}{16}\int(1+\cos 2t)dt$$

$$= \frac{1}{16}t + \frac{1}{32}\sin 2t + C = \frac{1}{16}t + \frac{1}{16}\sin t\cos t + C$$

$$= \frac{1}{16}t + \frac{1}{16}\tan t\cos^2 t + C$$

$$= \frac{1}{16}t + \frac{1}{16}\cdot\frac{x+1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} + C$$

$$= \frac{1}{16}\arctan\frac{x+1}{2} + \frac{(x+1)}{8\left(x^2+2x+5\right)} + C$$

d) $I = \int \sin^{n-1} x\sin[(n+1)x]dx = \int \sin^{n-1} x\sin(nx+x)dx$

$$= \int \sin^{n-1} x[\sin(nx)\cos x + \cos(nx)\sin x]dx$$

$$= \int \left[\sin^{n-1} x\sin(nx)\cos x + \cos(nx)\sin^n x\right]dx$$

$$= \frac{1}{n}\int\left[\sin(nx).n.\sin^{n-1} x\cos x + n.\cos(nx)\sin^n x\right]dx$$

$$= \frac{1}{n}\int\left[\sin(nx).(\sin^n x)' + (\sin nx)'\sin^n x\right]dx$$

$$= \frac{1}{n}\sin(nx)\sin^n x + C$$

e) $I = \int e^{-2x}\cos 3x dx = \frac{-1}{2}\int \cos 3x d(e^{-2x})$

$$= \frac{-1}{2}\left[e^{-2x}\cos 3x - \int e^{-2x} d(\cos 3x)\right]$$
$$= \frac{-1}{2}e^{-2x}\cos 3x - \frac{3}{2}\int e^{-2x}\sin 3x dx$$
$$= \frac{-1}{2}e^{-2x}\cos 3x + \frac{3}{4}\int \sin 3x d(e^{-2x})$$
$$= \frac{-1}{2}e^{-2x}\cos 3x + \frac{3}{4}\left[e^{-2x}\sin 3x - \int e^{-2x} d(\sin 3x)\right]$$
$$= \frac{-1}{2}e^{-2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{-2x}\sin 3x - \frac{9}{4}\int e^{-2x}\cos 3x dx$$
$$= \frac{-1}{2}e^{-2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{-2x}\sin 3x - \frac{9}{4}I$$

$\Rightarrow I = \frac{-2}{13}e^{-2x}\cos 3x + \frac{3}{13}e^{-2x}\sin 3x + C$

f) $I = \int \arcsin^2 x dx$

Đặt $t = \arcsin x$, $\left(-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$

$\Rightarrow I = \int t^2 \cos t dt = \int t^2 d(\sin t)$

$$= t^2\sin t - 2\int t\sin t dt$$
$$= t^2\sin t + 2\int t d(\cos t)$$
$$= t^2\sin t + 2t\cos t - 2\int \cos t dt$$
$$= t^2\sin t + 2t\cos t - 2\sin t + C$$
$$= x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C$$

Bài 52: Lập công thức truy hồi tính $I_n, n \in \mathbb{N}$

a) $I_n = \int x^n e^x dx$ b) $I_n = \int \sin^n x dx$ c) $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$

Lời giải:

a) $I_n = \int x^n e^x dx = \int x^n d(e^x) = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x dx = x^n e^x - nI_{n-1}$

Mà $I_0 = \int e^x dx = e^x + C$

$\Rightarrow I_n = x^n e^x - nI_{n-1}$

$$= x^n e^x - nx^{n-1}e^x + n(n-1)I_{n-2}$$
$$= \dots$$
$$= e^x \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{k!} x^k + C$$

b) $$\begin{aligned}
I_n &= \int \sin^n x dx \\
&= -\int \sin^{n-1} x d(\cos x) \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x + \int \cos x d(\sin^{n-1} x) \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \cos^2 x \sin^{n-2} x dx \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int (1-\sin^2 x) \sin^{n-2} x dx \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \left(\int \sin^{n-2} x dx - \int \sin^n x dx \right) \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \left(I_{n-2} - I_n \right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow nI_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2}$$

$$\Rightarrow I_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

Mà $I_0 = \int dx = x + C$

$$I_1 = \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I_n &= -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \\
&= -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x - \frac{n-1}{n(n-2)} \sin^{n-3} x \cos x + \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)} I_{n-4} \\
&= \dots \\
&= \begin{cases}
-\sum\limits_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} \dfrac{(n-1)!!(n-2k)!!}{n!!(n-1-2k)!!} \sin^{n-1-2k} x \cos x + \dfrac{(n-1)!!}{n!!} I_0 & \text{với } n \text{ chẵn, } n \geq 2 \\
-\sum\limits_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \dfrac{(n-1)!!(n-2k)!!}{n!!(n-1-2k)!!} \sin^{n-1-2k} x \cos x + \dfrac{(n-1)!!}{n!!} I_1 & \text{với } n \text{ lẻ} \\
x + C & \text{với } n = 0
\end{cases} \\
&= \begin{cases}
-\sum\limits_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} \dfrac{(n-1)!!(n-2k)!!}{n!!(n-1-2k)!!} \sin^{n-1-2k} x \cos x + \dfrac{(n-1)!!}{n!!} x + C & \text{với } n \text{ chẵn, } n \geq 2 \\
-\sum\limits_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \dfrac{(n-1)!!(n-2k)!!}{n!!(n-1-2k)!!} \sin^{n-1-2k} x \cos x - \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \cos x + C & \text{với } n \text{ lẻ} \\
x + C & \text{với } n = 0
\end{cases}
\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{\cos^n x} \\ &= \int \frac{d(\tan x)}{\cos^{n-2} x} \\ &= \frac{(\tan x)}{\cos^{n-2} x} - \int \tan x d\left(\frac{1}{\cos^{n-2} x}\right) \\ &= \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} - (n-2) \int \frac{\tan x \sin x dx}{\cos^{n-1} x} \\ &= \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} - (n-2) \int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^n x} \\ &= \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} - (n-2) \left(\int \frac{dx}{\cos^n x} - \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}\right) \\ &= \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} - (n-2)\left(I_n - I_{n-2}\right) \\ \Rightarrow I_n &= \frac{1}{n-1} \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} \end{aligned}$$

Mà $I_1 = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d\sin x}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C$

$$I_0 = \int dx = x + C$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_n &= \frac{1}{n-1} \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} \\ &= \frac{1}{n-1} \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} + \frac{n-2}{(n-1)(n-3)} \frac{\tan x}{\cos^{n-4} x} + \frac{(n-2)(n-4)}{(n-1)(n-3)} I_{n-2} \\ &= \ldots \\ &= \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} \frac{(n-2)!!(n-1-2k)!!}{(n-1)!!(n-2-2k)!!} \frac{\tan x}{\cos^{n-2-2k} x} + \frac{(n-2)!!}{(n-1)!!} I_1 & \text{với n lẻ }, n \geq 3 \\ \sum\limits_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} \frac{(n-2)!!(n-1-2k)!!}{(n-1)!!(n-2-2k)!!} \frac{\tan x}{\cos^{n-2-2k} x} + C & \text{với n chẵn}, n \geq 2 \\ \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C & \text{với } n = 1 \\ x + C & \text{với } n = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} \frac{(n-2)!!(n-1-2k)!!}{(n-1)!!(n-2-2k)!!} \frac{\tan x}{\cos^{n-2-2k} x} + \frac{(n-2)!!}{2(n-1)!!} \ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C & \text{với n lẻ }, n \geq 3 \\ \sum\limits_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} \frac{(n-2)!!(n-1-2k)!!}{(n-1)!!(n-2-2k)!!} \frac{\tan x}{\cos^{n-2-2k} x} + C & \text{với n chẵn}, n \geq 2 \\ \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C & \text{với } n = 1 \\ x + C & \text{với } n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2.2 Tích phân xác định

Bài 53: Tính các đạo hàm

a) $\frac{d}{dx} \int\limits_x^y e^{t^2} dt$ b) $\frac{d}{dy} \int\limits_x^y e^{t^2} dt$ c) $\frac{d}{dx} \int\limits_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

Lời giải:

a) $\dfrac{d}{dx}\int\limits_x^y e^{t^2}dt$

Gọi $F(t)$ là một nguyên hàm của hàm $f(t) = e^{t^2}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\int\limits_x^y e^{t^2}dt = \frac{d(F(y) - F(x))}{dx} = -f(x) = -e^{x^2}$$

b) $\dfrac{d}{dy}\int\limits_x^y e^{t^2}dt$

Gọi $F(t)$ là một nguyên hàm của hàm $f(t) = e^{t^2}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy}\int\limits_x^y e^{t^2}dt = \frac{d(F(y) - F(x))}{dy} = f(y) = e^{y^2}$$

c) $\dfrac{d}{dx}\int\limits_{x^2}^{x^3} \dfrac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

Gọi $F(t)$ là một nguyên hàm của hàm $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\int\limits_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \frac{d(F(x^3) - F(x^2))}{dx} = 3x^2 f(x^3) - 2xf(x^2) = \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$$

Bài 54: Dùng định nghĩa và cách tính tích phân xác định, tìm các giới hạn

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n\alpha} + \dfrac{1}{n\alpha+\beta} + \dfrac{1}{n\alpha+2\beta} + \ldots + \dfrac{1}{n\alpha+(n-1)\beta}\right], (\alpha, \beta > 0)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} + \sqrt{1+\dfrac{2}{n}} + \ldots + \sqrt{1+\dfrac{n}{n}}\right)$

Lời giải:

a) $I = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n\alpha} + \dfrac{1}{n\alpha+\beta} + \dfrac{1}{n\alpha+2\beta} + \ldots + \dfrac{1}{n\alpha+(n-1)\beta}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\dfrac{1}{n\alpha+i\beta}, (\alpha, \beta > 0)$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\alpha + \frac{i}{n}\beta}\cdot\frac{1}{n} = \int\limits_0^1 \frac{1}{\alpha+\beta x}dx = \left(\frac{1}{\beta}\ln|\alpha+\beta x|\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{\beta}\ln(1+\frac{\beta}{\alpha})$$

b) $I = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} + \sqrt{1+\dfrac{2}{n}} + \ldots + \sqrt{1+\dfrac{n}{n}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{i}{n}}$

$$= \int\limits_0^1 \sqrt{1+x}dx = \frac{2}{3}\left(\sqrt{1+x}\right)^3\Big|_0^1 = \frac{-2+4\sqrt{2}}{3}$$

Bài 55: Tìm các giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int\limits_0^{\sin x} \sqrt{\tan t}dt}{\int\limits_0^{\tan x} \sqrt{\sin t}dt}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\int\limits_0^{x} (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\left(\int\limits_0^{x} e^{t^2} dt\right)^2}{\int\limits_0^{x} e^{2t^2} dt}$

Lời giải:

a) $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int\limits_0^{\sin x} \sqrt{\tan t}dt}{\int\limits_0^{\tan x} \sqrt{\sin t}dt}$, dễ thấy giới hạn này ở dạng vô định $\dfrac{0}{0}$

Xét:

$$L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\int\limits_0^{\sin x} \sqrt{\tan t}dt\right)'}{\left(\int\limits_0^{\tan x} \sqrt{\sin t}dt\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x\sqrt{\tan(\sin x)}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}\sqrt{\sin(\tan x)}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \cos^3 x.\frac{\sqrt{\tan(\sin x)}}{\sqrt{\sin(\tan x)}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \cos^3 x.\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$$

(Do khi $x \to 0$, các VCB sau tương đương với nhau: $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \sin(\tan x) \sim \tan(\sin x)$)

$\Rightarrow L = L_1 = 1$ theo quy tắc L'Hospital.

b) $L = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\int\limits_0^{x} (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}}$, dễ thấy giới hạn này ở dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

Xét:

$$L_1 = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\int\limits_0^{x} (\arctan t)^2 dt\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(\arctan x)^2}{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\pi^2\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{4} = \frac{\pi^2}{4}$$

$\Rightarrow L = L_1 = \dfrac{\pi^2}{4}$ theo quy tắc L'Hospital.

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\left(\int\limits_0^{x} e^{t^2} dt\right)^2}{\int\limits_0^{x} e^{2t^2} dt}$, dễ thấy giới hạn này ở dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

Xét:

- $L_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left[\left(\int\limits_0^x e^{t^2}dt\right)^2\right]'}{\left(\int\limits_0^x e^{2t^2}dt\right)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2e^{x^2}\left(\int\limits_0^x e^{t^2}dt\right)}{e^{2x^2}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\left(\int\limits_0^x e^{t^2}dt\right)}{e^{x^2}}$, giới hạn này ở dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

- $L_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left[2\left(\int\limits_0^x e^{t^2}dt\right)\right]'}{(e^{x^2})'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

$\Rightarrow L = L_1 = L_2 = 0$ theo quy tắc L'Hospital.

Bài 56: Tính các tích phân sau:

a) $\int\limits_{1/e}^{e} |\ln x|(x+1)dx$

b) $\int\limits_{1}^{e} (x\ln x)^2 dx$

c) $\int\limits_{0}^{3\pi/2} \dfrac{dx}{2+\cos x}$

d) $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{\sin^2 x\cos x}{(1+\tan^2 x)^2}dx$

e) $\int\limits_{0}^{3} \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

f) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^n x\cos nx dx, n\in\mathbb{N}$

Lời giải:

a) $I = \int\limits_{1/e}^{e} |\ln x|(x+1)dx = \int\limits_{1/e}^{1} |\ln x|(x+1)dx + \int\limits_{1}^{e} |\ln x|(x+1)dx$

Đặt $I_1 = \int\limits_{1/e}^{1} |\ln x|(x+1)dx = \int\limits_{1/e}^{1} -\ln x(x+1)dx$

Đặt $I_2 = \int\limits_{1}^{e} |\ln x|(x+1)dx = \int\limits_{1}^{e} \ln x(x+1)dx$

Khi đó $I = I_1 + I_2$. Sử dụng tích phân từng phần,ta có:

$I_1 = -\ln x(\dfrac{x^2}{2}+x)|_{1/e}^{1} + \int\limits_{1/e}^{1} \dfrac{1}{x}(\dfrac{x^2}{2}+x)dx = -\dfrac{1}{2e^2} - \dfrac{1}{e} + \int\limits_{1/e}^{1} \dfrac{x}{2}+1dx = \dfrac{5}{4} - \dfrac{3}{4e^2} - \dfrac{2}{e}$

$I_2 = \ln x(\dfrac{x^2}{2}+x)|_1^e - \int\limits_{1}^{e} \dfrac{1}{x}(\dfrac{x^2}{2}+x)dx = \dfrac{e^2}{4} + \dfrac{5}{4}$

$\Rightarrow$I = I$_1 + I_2 = \dfrac{e^2}{4} - \dfrac{3}{4e^2} - \dfrac{2}{e} + \dfrac{5}{2}$

b) Đặt $I = \int\limits_1^e (x\ln x)^2 dx$, Thực hiện tích phân từng phần:

$$\begin{cases} u &= (\ln x)^2 \\ dv &= x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2\dfrac{\ln x}{x}dx \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases} \to I = (\ln x)^2 \frac{x^3}{3}|_1^e - \int\limits_1^e \frac{2}{3}x^2 \ln x dx$$

Thực hiện tích phân từng phần: $\int\limits_1^e \frac{2}{3}x^2 \ln x dx = \ln x \frac{2x^3}{9}|_1^e - \int\limits_1^e \frac{2}{9}x^2 dx = \frac{4}{27}e^3 + \frac{2}{27}$

$I = \frac{e^3}{3} - (\frac{4}{27}e^3 + \frac{2}{27}) = \frac{5}{27}e^3 - \frac{2}{27}$

c) $I = \int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x + 2} = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\cos x + 2} + \int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x + 2}$

Đặt $u = \tan\frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2\arctan u \to dx = \frac{2}{1+u^2}du$

Ta có: $\sin x = \frac{2u}{u^2+1}; \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

$$\to I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\frac{2}{1+u^2}du}{2 + \frac{1-u^2}{1+u^2}} + \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{\frac{2}{1+u^2}du}{2 + \frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{2}{3+u^2}du + \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{2}{3+u^2}du$$

$$I = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{u}{\sqrt{3}}|_0^{+\infty} + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{u}{\sqrt{3}}|_{-\infty}^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi + \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi = \frac{5\sqrt{3}}{9}\pi$$

d) $I = \int\limits_0^1 \frac{\sin^2 x \cos x}{(1+\tan^2 x)^2}dx = \int\limits_0^1 \sin x^2 \cos^5 x dx = \int\limits_0^1 \sin x^2 (1-\sin^2 x)^2 \cos x dx$

$I = \int\limits_0^1 \sin x^2 (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)$

Đặt $u = \sin x \to du = \cos x dx$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \to u = 0 \\ x = 1 \to u = \sin 1 \end{cases}$ Tích phân trở thành:

$$I = \int\limits_0^{\sin 1} u^2(1-u^2)^2 du = \int\limits_0^{\sin 1} (u^6 - 2u^4 + u^2)du = (\frac{u^7}{7} - \frac{2u^5}{5} + \frac{u^3}{3})|_0^{\sin 1}$$

$I = \frac{\sin^7 1}{7} - \frac{2\sin^5 1}{5} + \frac{\sin^3 1}{3}.$

e) $I = \int\limits_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx = \int\limits_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}d(x+1)$

$$= (x+1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\Bigg|_0^3 - \int\limits_0^3 (x+1)d\left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)$$

$$I=\frac{4\pi}{3}-\int_0^3 (x+1)\frac{\dfrac{1}{(x+1)^2}\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}}}{\sqrt{1-\dfrac{x}{x+1}}}dx=\frac{4\pi}{3}-\int_0^3\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\frac{4\pi}{3}-(\sqrt{x})\Big|_3^0=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$$

f) Đặt $I_n=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x.\cos nx dx$. Ta có: $I_0=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$. Xét $n\in\mathbb{N}^*$, ta có:

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x.\cos x\cos(nx)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x.\frac{\cos[(n-1)x]+\cos[(n+1)x]}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x.\cos[(n+1)x]dx+\frac{1}{2}.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x.\cos[(n-1)x]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x.[\cos(nx)\cos x-\sin(nx)\sin x]dx+\frac{1}{2}I_{n-1}$$

$$=\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[n\cos(nx).\cos^n x+\sin(nx).(-n\sin x\cos^{n-1}x)]dx+\frac{1}{2}I_{n-1}$$

$$=\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(\sin nx)'.\cos^n x+\sin(nx).(\cos^n x)']dx+\frac{1}{2}I_{n-1}$$

$$=\frac{\sin nx.\cos^n x}{2n}\Big|_0^{\pi/2}+\frac{1}{2}I_{n-1}=0+\frac{1}{2}I_{n-1}=\frac{1}{2}I_{n-1}$$

Do đó : $\begin{cases} I(0)=\dfrac{\pi}{2} \\ I_n=\dfrac{1}{2}I_{n-1},\forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}\Rightarrow I_n=\dfrac{\pi}{2^{n+1}},\forall n\in\mathbb{N}^*.$

Bài 57: Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ thì:

a) $\int\limits_0^{\pi/2}f(\sin x)dx=\int\limits_0^{\pi/2}f(\cos x)dx$

b) $\int\limits_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\int\limits_0^{\pi}\frac{\pi}{2}f(\sin x)dx$

Áp dụng tính các tích phân sau:

1. $\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x dx}{1+\cos^2 x}$

2. $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x}dx}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$

Lời giải:

a) $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ nên $f(\sin x)$ và $f(\cos x)$ khả tích trên $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Xét tích phân $I=\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)dx$. Đổi biến $t=\frac{\pi}{2}-x \Rightarrow dx=-dt$.

Đổi cận: Khi $x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$; khi $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0$.Ta có:

$$I=\int\limits_{\pi/2}^{0} f(\sin(\frac{\pi}{2}-t)).(-dt)=\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin(\frac{\pi}{2}-t))dt=\int\limits_0^{\pi/2} f(\cos t)dt.$$

Suy ra: $\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)dx=\int\limits_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$ (dpcm).

b) Xét $J=\int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)dx$. Đặt $x=\pi-t\Rightarrow dx=-dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=\pi \\ x=\pi\Rightarrow t=0\end{cases}$. Ta có:

$$J=\int\limits_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin(\pi-t)).(-dt)=\int\limits_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin(\pi-t)dt$$

$$=\int\limits_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt=\int\limits_0^{\pi}\pi f(\sin t)dt-\int\limits_0^{\pi}tf(\sin t)dt$$

Tức là: $J=\int\limits_0^{\pi}\pi f(\sin t)dt-J\Rightarrow J=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\pi f(\sin t)dt=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}f(\sin t)dt.$

$$\Rightarrow \int\limits_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\int\limits_0^{\pi}\frac{\pi}{2}f(\sin t)dt\text{(dpcm)}$$

Áp dụng tính các tích phân:

1. Áp dụng đẳng thức ở câu b, với $f(x)=\dfrac{x}{2-x^2}$ là hàm liên tục trên $[0,1]$.

   $\Rightarrow f(\sin x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$.Ta có:

   $$\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin xdx}{1+\cos^2 x}=\int\limits_0^{\pi}\frac{\pi}{2}.\frac{\sin xdx}{1+\cos^2 x}=-\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}\frac{d(\cos z)}{1+\cos^2 x}=-\frac{\pi}{2}\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{4}.$$

2. Áp dụng đẳng thức ở câu a, với $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{1-x^2}}$ liên tục trên $[0,1]$.

   $\Rightarrow f(\sin x)=\dfrac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt[4]{1-\sin^2 x}}=\dfrac{\sqrt{\sin x dx}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}, \forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$.Ta có:

   $$I=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x dx}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx=\int\limits_0^{\pi/2}f(\sin x)dx=\int\limits_0^{\pi/2}f(\cos x)dx=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\cos x dx}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx$$

   $$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x dx}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx+\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\cos x dx}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx\right)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}dx=\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

Bài 58: Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số khả tích trên $[a,b]$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right) \text{ (với } a < b)$$

(Bất đẳng thức Cauchy-Schwartz)

Lời giải:
Với bất kỳ các hàm $f(x), g(x)$ thỏa mãn đề bài, ta có:

$$(tf(x)+g(x))^2 \geq 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_a^b (tf(x)+g(x))^2 dx \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)t^2 + \left(2\int_a^b f(x)g(x)dx\right)t + \left(\int_a^b g^2(x)dx\right) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}(*)$$

+) Nếu $\int_a^b f^2(x)dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in (a,b) \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx = 0 \Rightarrow$ thỏa mãn bất đẳng thức đã cho.

+) Nếu $\int_a^b f^2(x)dx \neq 0 \Rightarrow$ Vế trái $(*)$ là một hàm bậc hai đối với biến t, lại có đa thức này không âm với $\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \triangle' \leq 0$

$$\Leftrightarrow \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$$

Kết hợp hai trường hợp lại, ta có điều phải chứng minh.

2.3 Tích phân suy rộng

Bài 59: Xét sự hội tụ và tính (trong trường hợp hội tụ) các tích phân sau:

a) $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

c) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

d) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$

e) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3x+2}$

f) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx.$

Lời giải:

a) Trước hết ta tính tích phân bất định:

$$\int xe^x dx = \int xd(e^x) = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C.$$

Suy ra:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x dx = \lim_{A\to-\infty} \int\limits_{A}^{0} xe^x dx = \lim_{A\to-\infty} [(x-1)e^x]\Big|_A^0 = \lim_{A\to-\infty} \left[-1-(A-1)e^A\right]$$

$$= -1 + \lim_{A\to-\infty} \frac{1-A}{e^{-A}} = (Lopitan) - 1 + \lim_{A\to-\infty} \frac{-1}{-e^{-A}} = -1 + 0 = -1$$

Do đó tích phân đã cho hội tụ và $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x dx = -1$

b) $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} + \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$. Lần lượt thực hiện các phép tính:

+) Tính $J = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$. Đặt $x = \tan t \Rightarrow dx = (1+\tan^2 t)dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x \to +\infty \Rightarrow t \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^- \end{cases}$

Tích phân trở thành:

$$J = \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{(1+\tan^2 t)dt}{(1+\tan^2 t)^2} = \int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int\limits_{0}^{\pi/2} \left(\frac{\cos 2t}{2} + \frac{1}{2}\right) dt = \left(\frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

+) Tính $K = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$. Có thể tương tự như trên, hoặc có thể thực hiện phép biến đổi $u = -x$ để chứng minnh $J = K$. Suy ra $dx = -du$. Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow u = 0 \\ x \to -\infty \Rightarrow u = +\infty \end{cases}$. Do đó:

$$K = \int\limits_{+\infty}^{0} \frac{-du}{((-u)^2+1)^2} = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{du}{(u^2+1)^2} = J = \frac{\pi}{4}.$$

Vậy $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = J + K = \frac{\pi}{2}$, điều này chứng tỏ tích phân đã cho hội tụ.

c) $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} + \int\limits_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

Trước hết ta đi tính nguyên hàm:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = \arcsin \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + C = \arcsin(2x-1) + C.$$

$$J = \lim_{A \to 0^+} \int\limits_A^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \lim_{A \to 0^+} (\arcsin(2x-1)\Big|_A^{1/2} = \lim_{A \to 0^+} (-\arcsin(2A-1)) = \frac{\pi}{2}.$$

$$K = \lim_{B \to 1^-} \int\limits_{1/2}^{B} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \lim_{B \to 1^-} (\arcsin(2x-1)\Big|_{1/2}^{B} = \lim_{B \to 1^-} \arcsin(2B-1) = \frac{\pi}{2}.$$

Do đó, $I = J + K = \pi$, điều này chứng tỏ I hội tụ.

d) $I = \int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim\limits_{A \to +\infty} \int\limits_2^A \frac{dx}{x \ln x} = \lim\limits_{A \to +\infty} \int\limits_2^A \frac{d(\ln x)}{\ln x}$

$= \lim\limits_{A \to +\infty} \ln[\ln(x)]\Big|_2^A = \lim\limits_{A \to +\infty} (\ln(\ln A) - \ln(\ln 2)) = +\infty.$

$\Rightarrow$ tích phân đã cho phân kỳ.

e) $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 3x + 2} = \lim\limits_{A \to +\infty} \int\limits_0^A \frac{dx}{x^2 + 3x + 2} = \lim\limits_{A \to +\infty} \int\limits_0^A \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$

$= \lim\limits_{A \to +\infty} \left(ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| \right) \Big|_0^A = \lim\limits_{A \to +\infty} \left(ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| - \ln \frac{1}{2} \right) = \ln 1 - \ln \frac{1}{2} = \ln 2.$

$\Rightarrow$tích phân đã cho hội tụ.

f) $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int\limits_0^{1} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

J là tích phân xác định $\Rightarrow J$ hội tụ.
K là tích phân suy rộng có điểm bất thường $+\infty$.

Ta có: Khi $x \to +\infty : \frac{x^2+1}{x^4+1} \sim \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}$, mà $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ hội tụ (do $\alpha = 2 > 1$)

$\Rightarrow K$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.
Vì J, K hội tụ $\Rightarrow I$ hội tụ.

J hội tụ nên: $J = \int\limits_0^{1} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int\limits_0^{1} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \lim\limits_{A\to 0^+} \int\limits_A^{1} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$

$= \lim\limits_{A\to 0^+} \int\limits_A^{1} \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} = \lim\limits_{A\to 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} \right)\Bigg|_A^1$

$= \lim\limits_{A\to 0^+} \left(0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{A-\frac{1}{A}}{\sqrt{2}} \right) = 0 - \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{-\pi}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$

Với cách lấy nguyên hàm tương tự, ta có:

$K = \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \lim\limits_{B\to +\infty} \int\limits_1^{B} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$

$= \lim\limits_{B\to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} \right)\Bigg|_1^B = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{B-\frac{1}{B}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$

Vậy $I = J + K = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Bài 60: Xét sự hội tụ của các tích phân sau:

a) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$

b) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$

c) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{xdx}{\ln^3 x}dx$

d) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\tan x - x}$

e) $\int\limits_0^{1} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}dx$

f) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$

g) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}}dx$

h) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x-\sin x}{\sqrt{x^7}}dx$

i) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3}}dx$

j) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x}dx$

Lời giải:

a) Đặt $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$, chọn $g(x) = \dfrac{1}{x^{3/2}}$ là các hàm dương, liên tục trên $[1, +\infty]$.

Xét giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}}{\dfrac{1}{x^{3/2}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$ (Dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$)

(Dùng Lopitan) $= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\sqrt{x}}{x} = 0.$

Mà $\int\limits_1^{+\infty} g(x)dx = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^{3/2}}dx$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh (vì $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$)

$\Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+x^3}} > 0$ liên tục trên $[1, +\infty]$. Điểm bất thường của tích phân là $+\infty$.

Khi $x \to +\infty$ thì $\dfrac{1}{\sqrt{x+x^3}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$, mà $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^{3/2}}dx$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh (vì $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$)

$\Rightarrow \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{x+x^3}}$ hội tụ tiêu chuẩn so sánh.

c) Xét $f(x) = \dfrac{xdx}{\ln^3 x}$, ta có:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{\ln x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) (Lopitan) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{3} = +\infty$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$ tồn tại $N_0 > 2$ sao cho: $f(x) > 10, \forall x > N_0$.

Xét $J = \int\limits_{N_0}^{+\infty} \dfrac{xdx}{\ln^3 x}$. Ta có: $\dfrac{x}{\ln^3 x} > 10, \forall x > N_0$, mà $\int\limits_{N_0}^{+\infty} 10dx$ phân kỳ $\Rightarrow J$ phân kỳ

$\Rightarrow \int\limits_2^{+\infty} \dfrac{xdx}{\ln^3 x}dx$ phân kỳ.

d) Nhận thấy: $f(x) = \tan x - x$ đồng biến trên $(0, +\infty) \Rightarrow 0 = f(0) < f(x) \leq f(1) < 2$.
Tích phân đã cho là tích phân suy rộng có điểm bất thường là $x = 0$.
Khi $x \to 0^+$, ta có: $\dfrac{1}{\tan x - x} = \dfrac{1}{\left[x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)\right] - x} \sim \dfrac{3}{x^3}$.

Mặt khác $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{x^3}dx$ phân kỳ vì $\alpha = 3 \notin (0,1) \Rightarrow \int\limits_0^1 \dfrac{3}{x^3}dx$ phân kỳ.

$\Rightarrow \int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\tan x - x}$ phân kỳ theo tiêu chuẩn so sánh.

e) Đặt $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}} \geq 0$ liên tục trên $[0,1)$.
Điểm bất thường của tích phân suy rộng là $x = 1$.
Khi $x \to 1^-$, ta có: $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x)(1+x+x^2+x^3)}} \sim \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{(1-x)^{1/2}}$.
Ta lại có: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2}.\frac{1}{(1-x)^{1/2}}dx$ hội tụ (do $\alpha = \dfrac{1}{2} \in (0,1)$)
$\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}dx$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

f) Đặt $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}} = I_1 + I_2$ với $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$ và $I_2 = \displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$.
+) Xét I_1. Ta có: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\sin x}} > 0$, liên tục trên $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$
$\Rightarrow I_1$ có điểm bất thường $x = 0$. Khi $x \Rightarrow 0^+$: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\sin x}} \sim \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{1}{x^{1/3}}$,
mà $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x^{1/3}}dx$ hội tụ do $\alpha = 1/3 \in (0,1) \Rightarrow I_1$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.
+) Xét I_2. Ta có: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\sin x}} > 0$, liên tục trên $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$
$\Rightarrow I_2$ có điểm bất thường $x = \pi$. Khi $x \Rightarrow \pi^-$:
$\dfrac{1}{\sqrt[3]{\sin x}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\sin(\pi - x)}} \sim \dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi - x}} = \dfrac{1}{(\pi - x)^{1/3}}$,
mà $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{(\pi - x)^{1/3}}dx$ hội tụ do $\alpha = 1/3 \in (0,1) \Rightarrow I_2$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.
Vì I_1 và I_2 hội tụ $\Rightarrow I$ hội tụ.

g) Đặt $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}}dx = \int\limits_0^1 \frac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}}dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}}dx = I_1 + I_2$

Với $I_1 = \int\limits_0^1 \frac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}}dx$ và $I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}}dx$

+) Xét I_1 là tích phân suy rộng, có duy nhất một điểm bất thường $x = 0$.

Xét $f(x) = \frac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}} > 0, \forall x \in (0, 1]$. Khi $x \Rightarrow 0^+$:

$f(x) \sim \frac{3x}{x\sqrt{x}} = \frac{3}{x^{1/2}}$, mà $\int\limits_0^1 \frac{3}{x^{1/2}}dx$ hội tụ do $\alpha = 1/2 < 1$

$\Rightarrow I_1 = \int\limits_0^1 \frac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}}dx$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

+) Xét I_2. Ta có $f(x) = \frac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}} > 0, \forall x \geq 1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+3x)}{x^\alpha} = 0$ với $\alpha > 0$ tùy ý. Lấy $\alpha = 1/3$.

Khi $x \to +\infty$: $0 < \ln(1+3x) < x^{1/3} \Rightarrow 0 < \frac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}} < \frac{x^{1/3}}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{7/6}}$

mà $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{7/6}}dx$ hội tụ do $\alpha = 7/6 > 1$

$\Rightarrow I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}}dx$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

Do I_1 và I_2 cùng hội tụ nên $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+3x)}{x\sqrt{x}}dx$ hội tụ.

h) Đặt $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{\sqrt{x^7}} dx = \int\limits_0^1 \frac{x - \sin x}{\sqrt{x^7}} dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{x - \sin x}{\sqrt{x^7}} dx = I_1 + I_2$

Với $I_1 = \int\limits_0^1 \frac{x - \sin x}{\sqrt{x^7}} dx$ và $I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{x - \sin x}{\sqrt{x^7}} dx$

+) I_1 là tích phân suy rộng, có duy nhất một điểm bất thường $x = 0$.

Xét $f(x) = \frac{x - \sin x}{\sqrt{x^7}}$ liên tục trên $(0, 1]$.

Dùng khai triển Maclaurine, khi $x \to 0^+$ thì: $x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$.

Và $f(x) \sim \frac{x^3/6}{\sqrt{x^7}} = \frac{1}{6x^{1/2}} > 0, \forall x \in (0, 1]$ mà $\int\limits_0^1 \frac{1}{6x^{1/2}} dx$ hội tụ do $\alpha = 1/2 < 1$

$\Rightarrow I_1 = \int\limits_0^1 \frac{x - \sin x}{\sqrt{x^7}} dx$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

+) Xét I_2. Ta có: $f(x) = \frac{x - \sin x}{\sqrt{x^7}} \geq 0, \forall x \geq 1$ (vì $x - \sin x \geq 1 - \sin x \geq 0, \forall x \geq 1$).

Vì $|\sin x| \leq 1 \Rightarrow \sin x$ bị chặn, do đó khi $x \to +\infty$:

$f(x) = \frac{x - \sin x}{\sqrt{x^7}} \sim \frac{x}{\sqrt{x^7}} = \frac{1}{x^{5/2}}$, mà $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{5/2}} dx$ hội tụ do $\alpha = 5/2 > 1$

$\Rightarrow I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{x - \sin x}{\sqrt{x^7}} dx$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

Do I_1 và I_2 cùng hội tụ nên $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{\sqrt{x^7}} dx$ hội tụ.

i) Đặt $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3}} dx = \int\limits_0^1 \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3}} dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3}} dx = I_1 + I_2$

Với $I_1 = \int\limits_0^1 \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3}} dx$ và $I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3}} dx$

+) Xét I_1. Với $f(x) = \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3}} > 0$ liên tục trên $(0, 1] \Rightarrow$ tích phân I_1 có điểm bất thường $x = 0$.
Khi $x \to 0+$ thì:

$f(x) \sim \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{1/2}}$ mà $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}$ hội tụ do $\alpha = 1/2 \in (0, 1)$

$\Rightarrow I_1 = \int\limits_0^1 \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3}} dx$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

+)Xét I_2. Với $f(x) = \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3}} > 0$ liên tục trên $[1, +\infty] \Rightarrow$ tích phân I_2 có điểm bất thường $x = +\infty$. Khi $x \to +\infty$ thì:

$f(x) \sim \frac{\pi/2}{\sqrt{x^3}} = \frac{\pi/2}{x^{3/2}}$, mà $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\pi/2}{x^{3/2}} dx$ hội tụ do $\alpha = 3/2 > 1$

$\Rightarrow I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3}} dx$ hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh.

Vậy I_1 và I_2 cùng hội tụ nên $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{x^3}} dx$ hội tụ.

j) Đặt $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx = \int\limits_0^1 \frac{\sin 2x}{x} dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx = I_1 + I_2$

Với $I_1 = \int\limits_0^1 \frac{\sin 2x}{x} dx$ và $I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx$

+) Vì $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sin 2x}{x} = 2$ nên có thể coi $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$ liên tục trên $[0, 1]$
$\Rightarrow I_1$ là tích phân xác định $\Rightarrow I_1$ hội tụ.

+) Xét tích phân $I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \sin 2x . \frac{1}{x} dx$.

Ta có: $F(A) = \int\limits_1^A \sin 2x dx = 1/2.(-\cos 2x)\Big|_1^A = 1/2.(\cos 2 - \cos 2A)$

$\Rightarrow |F(A)| = 1/2.|\cos 2 - \cos 2A| \leq 1/2.(|\cos 2| + |\cos 2A|) < 1/2.(1 + 1) = 1$
$\Rightarrow F(A)$ bị chặn khi $A \to +\infty$

Mà $\frac{1}{x}$ đơn điệu và $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx$ hội tụ theo tiêu chuẩn Dirichlet

Vậy I_1 và I_2 cùng hội tụ nên $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx$ hội tụ.

Bài 61: Nếu $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì có suy ra được $f(x) \to 0$ khi $x \to +\infty$ hay không?

Xét ví dụ $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$.

Lời giải:

Nếu $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì ta không suy ra được $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Ta chỉ ra ví dụ:

Xét $I = \int\limits_1^{+\infty} \sin(x^2)dx$. Đặt $x = \sqrt{t}$ (do miền lấy tích phân có $x > 0$) $\Rightarrow dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 1 \\ x \to +\infty \Rightarrow t \to +\infty \end{cases} \quad \Rightarrow I = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt = \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin t}{2t^{1/2}}dt.$

Do $\int\limits_1^{+\infty} \sin t dt$ bị chặn, và $\alpha = 1/2 > 0 \Rightarrow I$ hội tụ theo tiêu chuẩn Dirichlet.

Như vậy $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2)dx = I + \int\limits_0^{1} \sin(x^2)dx$ hội tụ nhưng ta không có $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin(x^2) = 0$ (Bằng cách chọn 2 dãy $a_k = \sqrt{k\pi}$ và $b_k = \sqrt{\pi/2 + 2k\pi}$.)

Bài 62: Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, +\infty)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \neq 0$. Tích phân $\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$ có hội tụ không?

Lời giải:

Xét trường hợp $A > 0$. Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \Rightarrow$ tồn tại N_0 đủ lớn ($N_0 > a$) sao cho:

$$f(x) > \frac{A}{2}, \forall x > N_0 (*).$$

Ta có: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_a^{N_0} f(x)dx + \int\limits_{N_0}^{+\infty} f(x)dx$. Xét tích phân $\int\limits_{N_0}^{+\infty} f(x)dx$, ta có so sánh $(*)$, mà $\int\limits_{N_0}^{+\infty} \dfrac{A}{2}dx$ phân kỳ $\Rightarrow \int\limits_{N_0}^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ theo tiêu chuẩn so sánh $\Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

Với trường hợp $A < 0$, ta chứng minh tương tự.

Vậy $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

Bài 63: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

a) Parabol $y = x^2 + 4$ và đường thẳng $x - y + 4 = 0$

b) Đường cong $y = x^3$ và các đường $y = x, y = 4x, (x \geq 0)$

c) Đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$ và parabol $y^2 = x$

d) Đường $y^2 = x^2 - x^4$

Hướng dẫn giải:

a) Phương trình hoành độ giao điểm của parabol và đường thẳng là:

$x^2+4=x+4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$. Hai đồ thị cắt nhau tại các điểm $(0,4)$ và $(1,5)$.

$\Rightarrow S=\int_0^1\left[(x+4)-(x^2+4)\right]dx=\int_0^1 (x-x^2)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\dfrac{1}{6}$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 (4x-x^3)dx-\int_0^1 (x-x^3)dx \\ &= \left(2x^2-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2-\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{15}{4} \end{aligned}$$

c) Do hàm số của đồ thị chẵn đối với y nên ta xét $y\geq 0$.

Khi đó các phương trình trở thành: $y=\sqrt{2x-x^2}$ và $y=\sqrt{x}$

Diện tích nửa trên của đồ thị tạo với trục Ox là:

$S_1=\dfrac{1}{2}\pi.1^2-\int_0^1\left(\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x}\right)dx=\dfrac{\pi}{2}-\int_0^1\left(\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x}\right)dx$

Xét tích phân: $I=\int_0^1\sqrt{2x-x^2}dx=\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}dx.$

Đặt $x-1=\sin\theta \Rightarrow \theta\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$

Khi đó: $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2\theta d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\sin 2\theta}{4}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0=\dfrac{\pi}{4}$

Vậy $S_1=\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{3}\Rightarrow S=2S_1=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{4}{3}$

d) Điều kiện xác định: $x^2-x^4\geq 0\Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$

Do hàm đã cho chẵn đối với cả x và y nên ta xét miền đồ thị ở góc phần tư thứ nhất D được giới hạn bởi: $\begin{cases} 0\leq x\leq 1 \\ y=\sqrt{x^2-x^4}\end{cases}$

Đặt $x=\sin\theta\Rightarrow\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, ta có:

$$\begin{aligned} S(D) &= \int_0^1\sqrt{x^2-x^4}dx=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^2\theta d\theta=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\cos\theta \\ &= -\frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Vậy diện tích hình phẳng cần tính là: $S=4S(D)=\dfrac{4}{3}$.

Bài 64: Tính thể tích của vật thể là phần chung của hai hình trụ $x^2 + y^2 \leq a^2$ và $y^2 + z^2 \leq a^2$, $a > 0$

Hướng dẫn giải:

Do các hàm đều chẵn đối với $x, y, z \Rightarrow$ Vật thể đối xứng qua cả ba trục tọa độ Decartes.

Xét phần vật thể là phần chung của hai hình trụ có lần lượt phương trình là $x^2 + y^2 \leq a^2$ và $y^2 + z^2 \leq a^2$ ở góc phần tám thứ nhất .

Xét mặt giao bởi hai hình trụ có phương trình $x^2 + y^2 \leq a^2$ và $y^2 + z^2 \leq a^2$. Suy ra:

$$x = z = \sqrt{a^2 - y^2}$$

Khi đó xét thiết diện tạo bởi mặt phẳng song song với trục Oy với phần vật thể đang xét, khi đó thiết diện là một hình vuông có cạnh r = $\sqrt{a^2 - y^2}$. Do đó diện tích của thiết diện là:

$$S(y) = a^2 - y^2$$

Khi đó theo công thức tính thể tích vật thể ứng với thiết diện ta có:

$$V' = \int_0^a S(y)dy = \int_0^a (a^2 - y^2)dy = (a^2y - \frac{y^3}{3})\bigg|_0^a = \frac{2}{3}a^3$$

Suy ra thể tích của vật thể cần tính là: $V = 8V' = \dfrac{16}{3}a^3$

Bài 65: Tính thể tích vật thể giới hạn bởi mặt cong $z = 4 - y^2$, các mặt phẳng tọa độ $x = 0, z = 0$ và $x = a, (a \neq 0)$.

Hướng dẫn giải:

Xét thiết diện tạo bởi vật với mặt phẳng vuông góc với trục Ox có diện tích là:

$$S(x) = \int_{-2}^{2} (4 - y^2)dy = \frac{32}{3}$$

Khi đó thể tích của vật là:

$$V = \left| \int_0^a S(x)dx \right| = \left| \int_0^a \frac{32}{3}dx \right| = \frac{32}{3}|a|$$

Bài 66: Tính thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay hình giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$ và $y = 0$.

a) Quanh trục Ox một vòng.

b) Quanh trục Oy một vòng.

Hướng dẫn giải:

a) Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường là:

$$2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2)dx = \frac{16}{15}\pi$$

b) Thể tích của khối tròn xoay được tính theo công thức:

$$V_{Oy} = 2\pi \int_0^2 xf(x)dx = 2\pi \int_0^2 x(2x - x^2)dx = 2\pi \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \bigg|_0^2 = \frac{8\pi}{3}$$

Bài 67: Tính độ dài đường cong

a) $y = \ln \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ khi x biến thiên từ 1 đến 2

b) $\begin{cases} x = a\left(\cos t + \ln\tan\dfrac{t}{2}\right) \\ y = a\sin t \end{cases}$ khi t biến thiên từ $\dfrac{\pi}{3}$ đến $\dfrac{\pi}{2}, (a>0)$.

Hướng dẫn giải:

a) $y = \ln\dfrac{e^x+1}{e^x-1} \Rightarrow y' = \dfrac{e^x}{e^x+1} - \dfrac{e^x}{e^x-1} = \dfrac{-2e^x}{e^{2x}-1}$

$\Rightarrow y'^2 + 1 = \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} + 1 = \dfrac{(e^{2x}+1)^2}{(e^{2x}-1)^2}$

Khi đó độ dài đường cong cần tính là:

$L = \displaystyle\int_1^2 \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}dx$. Đặt $t = e^{2x} - 1 \Rightarrow dt = 2e^{2x}dx = 2(t+1)dx$

Khi đó:

$$L = \int_{e^2-1}^{e^4-1} \frac{t+2}{2t(t+1)}dt = \int_{e^2-1}^{e^4-1}\left[\frac{1}{t} - \frac{1}{2(t+1)}\right]dt$$
$$= \left(\ln t - \frac{1}{2}\ln(t+1)\right)\Bigg|_{e^2-1}^{e^4-1}$$
$$= (\ln(e^4-1)-2) - (\ln(e^2-1)-1)$$
$$= \ln(e^2+1) - 1 = \ln(\frac{e^2+1}{e})$$

b) Ta có: $x'(t) = a\left(-\sin t + \dfrac{\tan^2\frac{t}{2}+1}{2\tan\frac{t}{2}}\right) = a\left(-\sin t + \dfrac{1}{\sin t}\right)$

$y'(t) = a\cos t$

$\Rightarrow \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)} = \sqrt{\left[a\left(-\sin t + \dfrac{1}{\sin t}\right)\right]^2 + (a\cos t)^2}$

$= a\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2 t} - 1} = a|\cot t|$

Độ dài đường cong:

$$L = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} a|\cot t|dt = a\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\sin t)}{\sin t}$$
$$= a\ln(\sin t)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= a\ln\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Bài 68: Tính diện tích mặt tròn xoay tạo nên khi quay các đường sau

a) $y = \sin x, 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ quay quanh trục Ox

b) $y = \frac{1}{3}(1-x)^3, 0 \leq x \leq 1$ quay quanh trục Ox

Hướng dẫn giải: Sử dụng công thức tính diện tích mặt tròn xoay:

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

a) $S = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$

Đặt $t = -\cos x, (-1 \leq t \leq 0) \Rightarrow dt = \sin x dx$

Khi đó:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-1}^{0} \sqrt{t^2+1} dt \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{2} t\sqrt{t^2+1} + \frac{1}{2} \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)\right) \Big|_{-1}^{0} \\ &= \pi \left(\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2}-1)\right) \end{aligned}$$

b) Ta có: $y' = -(1-x)^2 \Rightarrow S = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{3}(1-x)^3 \sqrt{1 + (x-1)^4} dx$

Đặt $t = (x-1)^4 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ dt = 4(x-1)^3 dx \end{cases}$

Khi đó:

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi}{6} \int_0^1 \sqrt{1+t} dt \\ &= \frac{2}{3} . \frac{\pi}{6} (1+t)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{9} \left(2\sqrt{2} - 1\right) \end{aligned}$$