GIẢI ĐỀ CƯƠNG GIẢI TÍCH I

Nhóm ngành 1

1.1-1.4 Dãy số, hàm số

Bài 1: Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = \sqrt{2\operatorname{arccot} x - \pi}$

b) $y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x}$

c) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$

d) $y = \arccos(\sin x)$

Lời giải

a) $y = \sqrt{2\operatorname{arccot} x - \pi}$

ĐKXĐ: $2\operatorname{arccot} x - \pi \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{arccot} x \geq \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \leq 0$

Vậy tập xác định của hàm số: $D = (-\infty, 0]$

b) $y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x}$

ĐKXĐ: $\begin{cases} -1 \leq \dfrac{2x}{1+x} \leq 1 \\ 1 + x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ \dfrac{-1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow D = \left[\dfrac{-1}{3}, 1\right]$

c) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$

ĐKXĐ: $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sin \pi x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \pi x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow D = (0, \infty) \setminus \mathbb{N}$

d) $y = \arccos(\sin x)$

ĐKXĐ: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy $D = \mathbb{R}$

Bài 2: Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sinh(-x) = -\sinh(x)$

b) $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$

c) $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh(x)$

d) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$

e) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

f) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

Lời giải

a) $\sinh(-x) = -\sinh(x)$

Ta có: $\begin{cases} \sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \sinh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2} \end{cases} \Rightarrow \sinh(-x) = -\sinh(x)$

b) $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$

$$VP = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.\frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}.\frac{e^y - e^{-y}}{2}$$
$$= \frac{1}{4}\left(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}\right)$$
$$= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \sinh(x+y)$$

c) $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh(x)$

Ta có: $VP = 2\sinh x\cosh(x) = 2.\frac{e^x - e^{-x}}{2}.\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \sinh 2x$

d) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$

$$VP = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.\frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}.\frac{e^y - e^{-y}}{2}$$
$$= \frac{1}{4}\left(e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}\right)$$
$$= \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} = \cosh(x+y)$$

e) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

Ta có: $VT = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(2+2) = 1$

f) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

Ta có: $VP = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{2e^{2x} + 2e^{-2x}}{4} = \cosh(2x)$

Bài 3: Tìm miền giá trị các hàm số

a) $y = \log(1 - 2\cos x)$

b) $y = \arcsin\left(\log\frac{x}{10}\right)$

c) $y = \operatorname{arccot}(\sin x)$

d) $y = \arctan(e^x)$

Lời giải

a) $y = \log(1 - 2\cos x)$

ĐKXĐ: $1 - 2\cos x > 0$

Với mọi x thuộc tập xác định, ta có: $0 < 1 - 2\cos x \le 3 \Rightarrow -\infty < \log(1 - 2\cos x) \le \log 3$

Vậy tập giá trị của y là: $\big(-\infty, \log 3\big]$

b) $y = \arcsin\left(\log\frac{x}{10}\right)$

Ta có :$D = [1, 100]$

Với mọi $x \in D \Rightarrow -1 \le \log\frac{x}{10} \le 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

Vậy tập giá trị của y là: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

c) $y = \operatorname{arccot}(\sin x)$

Ta có: $D = \mathbb{R}$. Với mọi $x \in D \Rightarrow -1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow \operatorname{arccot}(1) \le y \le \operatorname{arccot}(-1) \Rightarrow \frac{\pi}{4} \le y \le \frac{3\pi}{4}$

Vậy tập giá trị của y là: $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$

d) $y = \arctan(e^x)$

Ta có: $D = \mathbb{R}$. Với mọi $x \in D \Rightarrow e^x > 0 \Rightarrow 0 < y < \dfrac{\pi}{2}$

Vậy tập giá trị của y là: $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Bài 4: Tìm $f(x)$ biết

a) $f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

b) $f\left(\dfrac{x}{1+x}\right) = x^2$

Lời giải

a) $f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

Đặt $x + \dfrac{1}{x} = t \Rightarrow |t| \geq 2$

Phương trình trở thành: $f(t) = t^2 - 2,\ \forall |t| \geq 2$

$\Rightarrow f(x) = x^2 - 2,\ \forall |x| \geq 2$

b) $f\left(\dfrac{x}{1+x}\right) = x^2$

Đặt $\dfrac{x}{1+x} = t \Rightarrow x = \dfrac{t}{1-t},\ t \neq 1$

Phương trình trở thành: $f(t) = \left(\dfrac{t}{1-t}\right)^2, \forall t \neq 1$

$\Rightarrow f(x) = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^2, \forall x \neq 1$

Bài 5: Tìm hàm ngược của hàm số

a) $y = 2\arcsin x$

b) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$

c) $y = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

Lời giải

a) $y = 2\arcsin x$

Ta có: $x : [-1, 1] \rightarrow y : \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

$x = \sin\dfrac{y}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sin\dfrac{x}{2},\ x \in \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

b) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$

Ta có: $x : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow y : \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$y = \dfrac{1-x}{1+x} \Rightarrow x = \dfrac{1-y}{1+y}$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{1+x},\ \forall x \neq -1$

c) $y = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

Đặt $e^x = t(t > 0) \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{1}{t}\right)$

$$\Rightarrow t^2 - 2yt - 1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} t = y + \sqrt{y^2+1} > 0 & \text{(Thoả mãn)} \\ t = y - \sqrt{y^2+1} < 0 & \text{(Loại)} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow e^x = y + \sqrt{y^2+1} \Rightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$
$\Rightarrow f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), x \in \mathbb{R}$

Bài 6: Xét tính chẵn lẻ của các hàm số

a) $f(x) = a^x + a^{-x},\ (a > 0)$
b) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$
c) $f(x) = \sin x + \cos x$
d) $f(x) = \arcsin(\tan x)$

Lời giải

a) $f(x) = a^x + a^{-x},\ (a > 0)$
$D = \mathbb{R} \Rightarrow \forall x \in D \Rightarrow -x \in D$
Xét $f(-x) = a^{-x} + a^x = f(x), \forall x \in D \Rightarrow f(x)$ là hàm chẵn

b) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$
Ta có: $x + \sqrt{1+x^2} > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D = \mathbb{R}$
$\Rightarrow \forall x \in D \Rightarrow -x \in D$
Xét $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) = \ln\left(\dfrac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\right) = -\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow f(x)$ là hàm lẻ

c) $f(x) = \sin x + \cos x$
$D = \mathbb{R} \Rightarrow \forall x \in D \Rightarrow -x \in D$
Xét $\begin{cases} f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} \\ f\left(\dfrac{-2\pi}{3}\right) = \dfrac{-\sqrt{3}}{3} - \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f\left(\dfrac{-\pi}{3}\right) \neq \pm f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$
Vậy $f(x)$ không chẵn không lẻ

d) $f(x) = \arcsin(\tan x)$
ĐKXĐ: $-1 \le \tan x \le 1 \Rightarrow \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \le x \le \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow \forall x \in D \Rightarrow -x \in D$
Xét $f(-x) = \arcsin(\tan(-x)) = \arcsin(-\tan(x)) = -\arcsin(\tan x) = -f(x)$
$\Rightarrow f(x)$ là hàm lẻ.

Bài 7: Chứng minh rằng bất kì hàm số $f(x)$ nào xác định trong một khoảng đối xứng $(-a, a), (a > 0)$ cùng đều biểu diễn được duy nhất dưới dạng tổng của một hàm số chẵn với một hàm số lẻ.

Lời giải

Giả sử ta phân tích được hàm số $f(x) = g(x) + h(x)$, trong đó $g(x)$ là hàm chẵn và $h(x)$ là hàm lẻ.

Ta có: $\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(-x) + h(-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$

Đây là hệ phương trình tuyến tính có 2 ẩn: $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -2 \neq 0$

$\Rightarrow$ Hệ luôn có nghiệm và có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \\ h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{cases}$

Bài 8: Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số xác định trên khoảng đối xứng $(-a, a), (a > 0)$. Chứng minh:

a) Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hàm chẵn thì tổng và tích của chúng là hàm chẵn

b) Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hàm lẻ thì tổng của chúng là hàm lẻ, còn tích của chúng là hàm chẵn.

c) Nếu $f(x)$ là hàm lẻ, $g(x)$ là hàm chẵn thì tích của chúng là hàm lẻ

Lời giải

Gọi miền xác định của hai hàm số trên là $\mathbb{D}$

a) Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hàm chẵn thì tổng và tích của chúng là hàm chẵn

1) Do $f(x)$ và $g(x)$ là hàm chẵn nên $\begin{cases} f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{D} \\ g(x) = g(-x), \forall x \in \mathbb{D} \end{cases}$

2) Gọi $h(x) = f(x) + g(x)$ là hàm tổng của $f(x)$ và $g(x)$

$k(x) = f(x).g(x)$ là hàm tích của $f(x)$ và $g(x)$.

$\Rightarrow \begin{cases} h(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = h(-x), \forall x \in \mathbb{D} \\ k(x) = f(x).g(x) = f(-x).g(-x) = k(-x), \forall x \in \mathbb{D} \end{cases}$

Vậy hàm tổng và tích của $f(x)$ và $g(x)$ là hàm chẵn.

b) Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hàm lẻ thì tổng của chúng là hàm lẻ, còn tích của chúng là hàm chẵn.

1) Do $f(x)$ và $g(x)$ là hàm lẻ nên $\begin{cases} f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{D} \\ g(-x) = -g(x), \forall x \in \mathbb{D} \end{cases}$

2) Gọi $h(x) = f(x) + g(x)$ là hàm tổng của $f(x)$ và $g(x)$

$k(x) = f(x).g(x)$ là hàm tích của $f(x)$ và $g(x)$.

$\Rightarrow \begin{cases} h(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -h(x), \forall x \in \mathbb{D} \\ k(-x) = f(-x).g(-x) = f(x).g(x) = k(x), \forall x \in \mathbb{D} \end{cases}$

Vậy hàm tổng của $f(x)$ và $g(x)$ là hàm lẻ, hàm tích của $f(x)$ và $g(x)$ là hàm chẵn.

c) Nếu $f(x)$ là hàm lẻ, $g(x)$ là hàm chẵn thì tích của chúng là hàm lẻ

1) Do $f(x)$ là hàm lẻ, $g(x)$ là hàm chẵn nên $\begin{cases} f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{D} \\ g(x) = g(-x), \forall x \in \mathbb{D} \end{cases}$

2) Gọi $k(x) = f(x).g(x)$ là hàm tích của $f(x)$ và $g(x)$.

Ta có: $k(-x) = f(-x).g(-x) = -f(x).g(x) = -k(x)$

Vậy hàm tích $f(x)$ và $g(x)$ là hàm lẻ.

Bài 9: Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ của các hàm số sau (nếu có):

a) $f(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$

b) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$

c) $f(x) = \sin x^2$

d) $f(x) = \cos^2 x$

Lời giải

a) $f(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$

TH1: $A = B = 0$

Lúc này $f(x) = 0$ tuần hoàn nhưng không có chu kỳ cơ sở

TH2: $A^2 + B^2 \neq 0$

- Với $\lambda = 0$, $f(x) = A$ tuần hoàn nhưng không có chu kỳ cơ sở

- Với $\lambda \neq 0$ dễ thấy:

$A\cos\lambda x + B\sin\lambda x = A\cos\lambda\left(x + \frac{2\pi}{|\lambda|}\right) + B\sin\lambda\left(x + \frac{2\pi}{|\lambda|}\right), \forall x \in \mathbb{R}$

Ta sẽ chứng minh $T = \frac{2\pi}{|\lambda|}$ là chu kỳ cơ sở của $f(x)$

Giả sử tồn tại giá trị T_1 sao cho $0 < T_1 < T$ và:

$A\cos\lambda x + B\sin\lambda x = A\cos\Big(\lambda[x + T_1]\Big) + B\sin\Big(\lambda[x + T_1]\Big) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$

Do (1) đúng $\forall x \in \mathbb{R}$ nên ta có:

Tại $x = 0$: $A\cos(\lambda T_1) + B\sin(\lambda T_1) = A$

Tại $x = \frac{\pi}{2\lambda}$: $-A\sin(\lambda T_1) + B\cos(\lambda T_1) = B$

$\Rightarrow A^2\cos(\lambda T_1) + B^2\cos(\lambda T_1) = A^2 + B^2$

$\Rightarrow \cos(\lambda T_1) = 1 \Rightarrow T_1 = \frac{k2\pi}{|\lambda|}, (k \in \mathbb{N}^*)$

Do $0 < T_1 < T$ nên không tồn tại T_1

Do đó hàm số $f(x)$ tuần hoàn khi $\lambda \neq 0$ với chu kỳ cơ sở $T = \frac{2\pi}{|\lambda|}$

b) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$

Phân tích

1) $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_1 = 2\pi$

2) $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_1 = \pi$

3) $y = \sin 3x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_1 = \frac{2\pi}{3}$

Nên ta dễ dàng thấy $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$

Giải:

Dễ thấy:

$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x = \sin(x + 2\pi) + \frac{1}{2}\sin 2(x + 2\pi) + \frac{1}{3}\sin 3(x + 2\pi)$

$\forall x \in \mathbb{R}$

Ta sẽ chứng minh $T = 2\pi$ là chu kỳ cơ sở của $f(x)$

Giả sử tồn tại T_1 sao cho $0 < T_1 < T$ và:

$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x = \sin(x + T_1) + \frac{1}{2}\sin 2(x + T_1) + \frac{1}{3}\sin 3(x + T_1)$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$

Tại (1) cho $x = 0$ ta có: $\sin T_1 + \frac{1}{2}\sin 2T_1 + \frac{1}{3}\sin 3T_1 = 0 \quad (2)$

Tại (1) cho $x = \pi$ ta có: $-\sin T_1 + \frac{1}{2}\sin 2T_1 - \frac{1}{3}\sin 3T_1 = 0 \quad (3)$

Từ$(2)(3) \Rightarrow \sin T_1 + \frac{1}{3}\sin 3T_1 = 0$

$$\Rightarrow \sin T_1 + \frac{1}{3}\left(3\sin T_1 - 4\sin^3 T_1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sin T_1\left(2 - \frac{4}{3}\sin^2 T_1\right) = 0 \Rightarrow \sin T_1 = 0 \Rightarrow T_1 = \pi$$

Thử lại với $T_1 = \pi$ thì tại $x_0 = \frac{\pi}{2}$:

$\sin x_0 + \frac{1}{2}\sin 2x_0 + \frac{1}{3}\sin 3x_0 \neq \sin(x_0 + \pi) + \frac{1}{2}\sin 2(x_0 + \pi) + \frac{1}{3}\sin 3(x_0 + \pi)$

Vậy không tồn tại T_1

Do đó hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ cơ sở $T = 2\pi$

c) $f(x) = \sin x^2$

Một hàm số tuần hoàn thì đạo hàm của nó cũng sẽ tuần hoàn

Ta dễ thấy $f'(x) = 2x\cos x^2$ không tuần hoàn nên ta sẽ chứng minh hàm số $f(x)$ không tuần hoàn

Để chứng minh hàm số không tuần hoàn cách đơn giản nhất là dùng phản chứng

<u>Giải:</u> Giả sử hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ $T > 0$:

$\Rightarrow \sin x^2 = \sin(x + T)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$

1) Tại (1) cho $x = 0$ ta được: $\sin T^2 = 0 \Rightarrow T^2 = k\pi \Rightarrow T = \sqrt{k\pi} \quad (k \in \mathbb{N}^*)$

2) Tại (1) cho $x = \sqrt{\pi}$ ta được: $\sin(\sqrt{\pi} + T)^2 = 0 \Rightarrow (\sqrt{\pi} + T)^2 = l\pi \quad (l \in \mathbb{N}^*)$
   $\Rightarrow (\sqrt{\pi} + \sqrt{k\pi})^2 = l\pi \Rightarrow k$ là số chính phương do $l \in \mathbb{N}^*$
   Đặt $k = h^2, (h \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow T = h\sqrt{\pi}$

3) Tại (1) cho $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ta được: $\sin\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} + T\right)^2 = 1$

   $$\Rightarrow \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} + T\right)^2 = \frac{\pi}{2} + 2m\pi \quad (m \in \mathbb{N}^*)$$

   $$\Rightarrow \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} + h\sqrt{\pi}\right)^2 = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$$

   $$\Rightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{2h\pi}{\sqrt{2}} + h^2\pi = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$$

   $\Rightarrow 2m = h^2 + \sqrt{2}h \quad$ (vô lý do $m \in \mathbb{N}^*$)

   Vậy hàm số $f(x)$ không tuần hoàn.

d) $f(x) = \cos^2 x$

1) Ta có: $f(x) = \cos^2 x = \dfrac{\cos 2x + 1}{2}$

Dễ thấy: $f(x) = \dfrac{\cos 2x + 1}{2} = \dfrac{\cos(2x + 2\pi) + 1}{2} = \dfrac{\cos 2(x + \pi) + 1}{2} = f(x + \pi)$

Vậy $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$

Ta sẽ chứng minh $T = \pi$ là chu kỳ cơ sở của $f(x)$

2) Giả sử tồn tại T_1 sao cho $0 < T_1 < T$ và $f(x) = f(x + T_1)$

$\Rightarrow \dfrac{\cos 2x + 1}{2} = \dfrac{\cos 2(x + T_1) + 1}{2}$

$\Rightarrow \cos 2x = \cos 2(x + T_1) \quad (1)$

Tại (1) cho $x = 0$ ta được: $\cos\left(2T_1\right) = 1 \Rightarrow 2T_1 = k2\pi \Rightarrow T_1 = k\pi, (k \in \mathbb{N}^*)$

Do $0 < T_1 < T$ nên không tồn tại T_1

Vậy $T = \pi$ là chu kỳ cơ sở của $f(x)$

Câu 10: Tìm giới hạn của các dãy sau (nếu có) với số hạng tổng quát x_n như sau:

a) $x_n = n - \sqrt{n^2 - n}$

b) $x_n = \dfrac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n}$

c) $x_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{(n-1)n}$

d) $x_n = \dfrac{\sqrt{n}\cos n}{n + 1}$

Lời giải

a) $x_n = n - \sqrt{n^2 - n}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(n - \sqrt{n^2 - n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n + \sqrt{n^2 - n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1 + \sqrt{1 - \dfrac{1}{n}}}$

$= \dfrac{1}{2}$

b) $x_n = \dfrac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n}$ Ta thấy: Do $0 \le \sin^2 n \le 1, -1 \le \cos^3 n \le 1 \Rightarrow -1 \le \sin^2 n - \cos^3 n \le 2$

$\Rightarrow \dfrac{-1}{n} \le x_n \le \dfrac{2}{n}$

Lại có: $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ theo tiêu chuẩn kẹp.

c) $x_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{(n-1)n}$ Ta có:

$x_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{(n-1)n} = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n} = 1 - \dfrac{1}{n}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 1 - 0 = 1$

d) $x_n = \dfrac{\sqrt{n}\cos n}{n + 1}$ Ta có: $-1 \le \cos n \le 1 \Rightarrow \dfrac{-\sqrt{n}}{n + 1} \le x_n \le \dfrac{\sqrt{n}}{n + 1}$

Lại có: $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-\sqrt{n}}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-\sqrt{\dfrac{1}{n}}}{1+\dfrac{1}{n}} = \dfrac{0}{1+0} = 0 \\ \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{n}}}{1+\dfrac{1}{n}} = \dfrac{0}{1+0} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ theo tiêu chuẩn kẹp.

Câu 11: Xét sự hội tụ và tìm giới hạn (nếu có) của các dãy với số hạng tổng quát như sau:

a) $x_n = \sqrt[n]{n^2+2}$

b) $x_n = \dfrac{1}{2}\left(x_{n-1} + \dfrac{1}{x_{n-1}}\right), \quad x_0 > 0$

Lời giải

a) $x_n = \sqrt[n]{n^2+2}$

Đặt $L = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2+2\right)^{\frac{1}{n}}$

Xét $L_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+2)^{\frac{1}{x}}$

Ta có: $L_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+2)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln\left(x^2+2\right)}$

Xét giới hạn hàm số: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(x^2+2\right)}{x}$ có dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$

Xét $L_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\ln\left(x^2+2\right)\right)'}{x'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{2x}{x^2+2}}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{2}{x^2}} = 0$

Do L_2 tồn tại nên theo quy tắc L'hospital $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(x^2+2\right)}{x} = L_2 = 0$

$\Rightarrow L_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+2)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln\left(x^2+2\right)} = e^0 = 1$

$\Rightarrow L = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2+2\right)^{\frac{1}{n}} = 1$

b) $x_n = \dfrac{1}{2}\left(x_{n-1} + \dfrac{1}{x_{n-1}}\right), \quad x_0 > 0$

Ta sẽ chứng minh dãy hội tụ bằng tiêu chuẩn đơn điệu và bị chặn trên hoặc dưới.

Đầu tiên kiểm tra: $x_n - x_{n-1} = \dfrac{1-x_{n-1}^2}{2x_{n-1}}$

Bây giờ để biết dãy tăng hay giảm chỉ cần kiểm tra xem dấu của $1 - x_{n-1}^2$

Dễ thấy $x_0 > 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{2}\left(x_0 + \dfrac{1}{x_0}\right) \geq \dfrac{1}{2}.2\sqrt{x_0.\dfrac{1}{x_0}} = 1$ theo BĐT Cauchy.

Tương tự ta thấy $x_2, x_3, ... \geq 1$. Dự đoán $1 - x_{n-1}^2 \leq 0, \forall n \geq 2$.

Vậy ta sẽ chứng minh dãy giảm, và để chứng minh $x_{n-1} \geq 1$ ta sẽ dùng quy nạp.

Giải:

- Dễ thấy $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$
- Chứng minh: $x_n \geq 1 \quad \forall n > 0 \quad (1)$
  - Ta thấy (1) đúng với $n = 1$ do $x_1 = \dfrac{1}{2}\left(x_0 + \dfrac{1}{x_0}\right) \geq \dfrac{1}{2}.2\sqrt{x_0.\dfrac{1}{x_0}} = 1$ theo BĐT Cauchy
  - Giả sử (1) đúng với $n = k \Rightarrow x_k \geq 1$
  - Ta sẽ chứng minh (1) đúng với $n = k+1$
    Thật vậy: $x_{k+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_k + \dfrac{1}{x_k}\right) \geq \dfrac{1}{2}.2\sqrt{x_k.\dfrac{1}{x_k}} = 1$ theo BĐT Cauchy.

  Vậy (1) đúng theo giả thiết quy nạp.
- Ta có: $x_n - x_{n-1} = \dfrac{1 - x_{n-1}^2}{2x_{n-1}} \leq 0 \quad \forall n > 0$ (do $x_n \geq 1, \forall n > 0$)
  Vậy dãy x_n là dãy giảm và bị chặn dưới do $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$
  Do đó x_n hội tụ. Gọi $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$
  Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n-1} + \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n-1}}\right)$
  $\Rightarrow a = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{1}{a}\right) \Rightarrow a = \pm 1 \Rightarrow a = 1$ (do $x_n \geq 1, \forall n > 0$)
  Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Bài 12: Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\sqrt{1+x} - \dfrac{1}{x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}, (m, n \in \mathbb{N})$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2-1} - x\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x} - 1}{\ln\left(1 + 3\sin x\right)}$

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\sqrt{1+x} - \dfrac{1}{x}\right)$

Ta có: $\sqrt{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{2}$ khi $x \to 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\sqrt{1+x} - \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{2}}{x} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}, (m, n \in \mathbb{N})$

Xét $L_1 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - 1}{x}$

Do $\sqrt[m]{1+\alpha x} - 1 \sim \dfrac{\alpha x}{m}$ khi $x \to 0$

$\Rightarrow L_1 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\alpha x}{m}}{x} = \dfrac{\alpha}{m}$

Tương tự ta có: $L_2 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x} = \dfrac{-\beta}{n}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x} = L_1 + L_2 = \dfrac{\alpha}{m} - \dfrac{\beta}{n}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2-1}-x\right)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2-1}-x\right) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^3+x^2-1)-x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2-1}\right)^2 + x\sqrt[3]{x^3+x^2-1}+x^2}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2-1}\right)^2 + x\sqrt[3]{x^3+x^2-1}+x^2}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}}\right)^2 + \sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}}+1} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right) &= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x}-x-1+2x+1-2\sqrt{x^2+x}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{(x^2+2x)-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x}+x+1}+\frac{(2x+1)^2-4(x^2+x)}{2x+1+2\sqrt{x^2+x}}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{-1}{\sqrt{x^2+2x}+x+1}+\frac{1}{2x+1+2\sqrt{x^2+x}}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+2x}+x+1}+\frac{x}{2x+1+2\sqrt{x^2+x}}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-1}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1+\dfrac{1}{x}}+\frac{1}{2+\dfrac{1}{x}+2\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}\right)\\ &= \frac{-1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{-1}{4}\end{aligned}$$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$ có dạng $\dfrac{0}{0}$

Xét $L_1 = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\left(x^{100}-2x+1\right)'}{\left(x^{50}-2x+1\right)'} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{100x^{99}-2}{50x^{49}-2} = \dfrac{49}{24}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1} = L_1 = \dfrac{49}{24}$ theo quy tắc L'hospital

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+4x}-1}{\ln\left(1+3\sin x\right)}$

Ta có: $\begin{cases}\sqrt{1+4x}-1 \sim 2x \text{ khi } x\to 0\\ \ln\left(1+3\sin x\right) \sim 3\sin x \text{ khi } 3\sin x\to 0 (\text{do } x\to 0)\\ \sin x \to x \text{ khi } x\to 0\end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-1}{\ln\left(1+3\sin x\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$

Bài 13: Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\left(x+\arccos^3 x\right)-\ln x}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\left(x+\arccos^3 x\right)-\ln x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{\arccos^3 x}{x}\right)}{x^2}$

Do $\lim\limits_{x\to 0^+}\arccos^3 x=\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^3\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\arccos^3 x}{x}=+\infty\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(1+\dfrac{\arccos^3 x}{x}\right)=+\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{\arccos^3 x}{x}\right)}{x^2}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$

$$\begin{aligned}\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)&=\lim\limits_{x\to +\infty}2\cos\left(\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)\\&=\lim\limits_{x\to +\infty}2\cos\left(\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)\sin\dfrac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\end{aligned}$$

Do $-1\le\cos\left(\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)\le 1$

$\Rightarrow \left|2\cos\left(\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)\sin\dfrac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\right|\le\left|2\sin\dfrac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\right|$

Lại có: $\lim\limits_{x\to +\infty}\left|2\sin\dfrac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\right|=2\sin 0=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}2\cos\left(\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)\sin\dfrac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=0$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$ (do $\sin x\sim x$ khi $x\to 0$)

Xét $L_1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}\right)'}{\left(x^2\right)'}$

$$\begin{aligned}&=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}+\dfrac{\sin x}{3\sqrt[3]{\cos^2 x}}}{2x}\\&=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{-1}{2\sqrt{\cos x}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\cos^2 x}}}{2}\text{(do }\sin x\to x\text{ khi }x\to 0)\\&=\dfrac{-1}{12}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2} = L_1 = \dfrac{-1}{12}$ theo quy tắc L'hospital

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} = \dfrac{-1}{12}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{\dfrac{x^2}{2}}$ (do $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ khi $x\to 0$)

Xét $L_1 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x\cos 2x\cos 3x)'}{\left(\dfrac{x^2}{2}\right)'}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x\cos 2x\cos 3x + 2\cos x\sin 2x\cos 3x + 3\cos x\cos 2x\sin 3x}{x}$

Lại có:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x\cos 2x\cos 3x}{x} = \lim_{x\to 0} \cos 2x\cos 3x = 1 (\text{do} \sin x \to x \text{khi} x\to 0)$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x\sin 2x\cos 3x}{x} = \lim_{x\to 0} 4\cos x\cos 3x = 4 (\text{do} \sin 2x \to 2x \text{khi} x\to 0)$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{3\cos x\cos 2x\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0} 9\cos x\cos 2x = 9 (\text{do} \sin 3x \to 3x \text{khi} x\to 0)$$

$\Rightarrow L_1 = 1+4+9 = 14$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x} = L_1 = 14$ theo quy tắc L'hospital

Bài 14: Tìm các giới hạn:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}\right), x>0$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$

e) $\lim\limits_{x\to 1} (1+\sin\pi x)^{\cot \pi x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \left[\ln(e+2x)\right]^{\frac{1}{\sin x}}$

Lời giải

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}} = 1, \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}} = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}} = 1^1 = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

Đặt $L = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$\Rightarrow \ln L = \lim_{x\to 0^+} \ln\left[\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}\right]$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\ln\left(\cos\sqrt{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(1-(1-\cos\sqrt{x})\right)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-(1-\cos\sqrt{x})}{x}\left(\text{do } \ln\left(1-(1-\cos\sqrt{x})\right) \sim -(1-\cos\sqrt{x}) \text{ khi } x\to 0^+\right)$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-x}{2}}{x}\left(\text{do } (1-\cos\sqrt{x}) \sim \frac{(\sqrt{x})^2}{2} = \frac{x}{2} \text{ khi } x\to 0^+\right)$$
$$= \frac{-1}{2}$$
$$\Rightarrow L = e^{\frac{-1}{2}}$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}\right), x>0$

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} n^2\left(x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n+1}}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} n^2.x^{\frac{1}{n+1}}.\left(x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}} - 1\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} n^2.x^{\frac{1}{n+1}}\left(x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} n^2.x^{\frac{1}{n+1}}.\frac{1}{n(n+1)}.\ln x\left(\text{do } \left(x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right) \sim \frac{1}{n(n+1)}.\ln x \text{ khi } n\to\infty\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n+1}}.\frac{n^2}{n(n+1)}.\ln x = \lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n+1}}.\frac{1}{1+\frac{1}{n}}.\ln x = x^0.1.\ln x = \ln x$$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right)^x$

Đặt $L = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right)^x$

$$\Rightarrow \ln L = \lim_{x\to\infty} \ln\left[\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right)^x\right] = \lim_{x\to\infty} x\ln\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

Đặt $t = \frac{1}{x} \Rightarrow t\to 0$ khi $x\to\infty$

Lúc này: $\ln L = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln\left(\sin t + \cos t\right)}{t}$

Xét $L_1 = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\left(\ln\left(\sin t+\cos t\right)\right)'}{t'} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}}{1} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} = 1$

$\Rightarrow \ln L = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln\left(\sin t+\cos t\right)}{t} = L_1 = 1$ theo quy tắc L'hospital

$\Rightarrow L = e^1 = e$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(1+\sin\pi x\right)^{\cot\pi x}$

Đặt $L = \lim\limits_{x\to 1}\left(1+\sin\pi x\right)^{\cot\pi x}$

$$\Rightarrow \ln L = \lim_{x\to 1} \ln\left[\left(1+\sin\pi x\right)^{\cot \pi x}\right]$$
$$= \lim_{x\to 1} \cot(\pi x)\ln\left(1+\sin\pi x\right)$$
$$= \lim_{x\to 1} \cos(\pi x)\frac{\ln\left(1+\sin\pi x\right)}{\sin(\pi x)}$$
$$= \lim_{x\to 1} \cos(\pi x)\left(\text{do } \ln\left(1+\sin\pi x\right)\sim \sin\pi x \text{ khi } x\to 1\right)$$
$$= -1$$
$$\Rightarrow L = e^{-1}$$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(e+2x)\right]^{\frac{1}{\sin x}}$

Đặt $L = \lim\limits_{x\to 0}\left[\ln(e+2x)\right]^{\frac{1}{\sin x}}$

$$\Rightarrow \ln L = \lim_{x\to 0} \ln\left[\left[\ln(e+2x)\right]^{\frac{1}{\sin x}}\right]$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\ln\left[\ln(e+2x)\right]$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[\ln(e+2x)\right]}{x}\left(\text{do } \sin x\sim x \text{ khi } x\to 0\right)$$

Xét $L_1 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\ln\left[\ln(e+2x)\right]\right)'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2}{e+2x}}{\dfrac{\ln(e+2x)}{1}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{2}{e+2x}}{\ln(e+2x)} = \dfrac{2}{e}$

$\Rightarrow \ln L = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[\ln(e+2x)\right]}{x} = L_1 = \dfrac{2}{e}$ theo quy tắc L'hospital

$\Rightarrow L = e^{\frac{2}{e}}$

Bài 15: So sánh các cặp VCB sau:

a) $\alpha(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$ và $\beta(x) = e^{\sin x} - \cos x$, khi $x\to 0^+$
b) $\alpha(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt{x}$ và $\beta(x) = \cos x - 1$, khi $x\to 0^+$
c) $\alpha(x) = x^3 + \sin^2 x$ và $\beta(x) = \ln\left(1+2\arctan\left(x^2\right)\right)$, khi $x\to 0$

Lời giải

a) $\alpha(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$ và $\beta(x) = e^{\sin x} - \cos x$, khi $x\to 0^+$

Xét $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{e^{\sin x}-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{\sqrt{x}}}{e^{\sin x}-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt[4]{x}}{e^{\sin x}-\cos x}$ (Ngắt VCB bậc cao)

Xét $L_1 = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(\sqrt[4]{x}\right)'}{\left(e^{\sin x}-\cos x\right)'} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}\left(\cos x e^{\sin x}+\sin x\right)} = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt[4]{x}}{e^{\sin x}-\cos x} = L_1 = +\infty$ theo quy tắc L'hospital

Vậy $\alpha(x)$ là VCB bậc thấp hơn $\beta(x)$ khi $x\to 0^+$

b) $\alpha(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt{x}$ và $\beta(x) = \cos x - 1$, khi $x\to 0^+$

Xét $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\dfrac{-x^2}{2}}$

$\left(\text{do }(\sqrt[3]{x}-\sqrt{x})\sim\sqrt[3]{x}, 1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}\text{ khi }x\to 0^+\right)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\dfrac{-x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-2}{x^{\frac{5}{3}}}=-\infty$

Vậy $\alpha(x)$ là VCB bậc thấp hơn $\beta(x)$ khi $x\to 0^+$

c) $\alpha(x)=x^3+\sin^2 x$ và $\beta(x)=\ln\left(1+2\arctan\left(x^2\right)\right)$, khi $x\to 0$

Xét $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+\sin^2 x}{\ln\left(1+2\arctan\left(x^2\right)\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+\sin^2 x}{2\arctan\left(x^2\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+\sin^2 x}{2x^2}$

$\left(\text{do }\ln\left(1+2\arctan\left(x^2\right)\right)\sim 2\arctan\left(x^2\right), \arctan\left(x^2\right)\sim x^2\text{ khi }x\to 0\right)$

Ta có: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2}=0\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}\left(\text{do}\sin x\sim x\text{khi}x\to 0\right)\end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+\sin^2 x}{2x^2}=0+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

Vậy $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là 2 VCB cùng bậc khi $x\to 0$

1.7. Hàm số liên tục

Bài 16: Tìm a để hàm số liên tục tại $x=0$

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2}, & \text{nếu } x\neq 0\\ a, & \text{nếu } x=0\end{cases}$

b) $g(x)=\begin{cases}ax^2+bx+1, & \text{nếu } x\geq 0\\ a\cos x+b\sin x, & \text{nếu } x<0\end{cases}$

Lời giải

a) Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2.\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}.$

Hàm số đã cho liên tục tại $x=0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=a.$

Điều này tương đương với $a=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $a=\dfrac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

b) Hàm số đã cho liên tục tại $x=0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$

$\Leftrightarrow a.0^2+b.0+1=a.\cos 0+b.\sin 0=a.\cos 0+b.\sin 0$

$\Leftrightarrow a=1$

Vậy $a=1$ là giá trị cần tìm.

Bài 17: Hàm $f(x)$ sau liên tục tại những giá trị x nào?

a) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x \text{ hữu tỉ} \\ 1, & \text{nếu } x \text{ vô tỉ} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x \text{ hữu tỉ} \\ x, & \text{nếu } x \text{ vô tỉ} \end{cases}$

Lời giải

a) Ta sẽ chứng minh hàm số đã cho không liên tục trên $\mathbb{R}$.

Thật vậy, giả sử hàm số liên tục tại điểm $x = x_0$. Khi đó tồn tại dãy số hữu tỉ x_n và dãy số vô tỉ y_n sao cho hai dãy cùng có giới hạn hữu hạn bằng x_0.

Nhưng điều này rõ ràng là vô lý bởi $\lim f(x_n) = 0$ và $\lim f(y_n) = 1$.

Vậy hàm số đã cho không liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Hàm số đã cho không liên tục tại $x = a$ với $a \neq 0$ tuỳ ý (chứng minh tương tự câu a).

Tại điểm $x = 0$, ta thấy hiển nhiên $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

Vậy hàm số đã cho liên tục tại điểm $x = 0$.

Bài 18: Điểm $x = 0$ là điểm gián đoạn loại gì của các hàm số

a) $y = \dfrac{8}{1 - 2^{\cot x}}$

b) $y = \dfrac{1}{x} \arcsin x$

c) $y = \dfrac{\sin \frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$

d) $y = \dfrac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$ $(a \neq b)$

Lời giải

a) Hàm số đã cho không liên tục tại $x = 0$.

Nhận xét:

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{8}{1 - 2^{\cot x}} = \lim\limits_{a\to +\infty} \dfrac{8}{1 - 2^a} = 0$. (Đặt $a = \cot x \Rightarrow a \to +\infty$ khi $x \to 0^+$)

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{8}{1 - 2^{\cot x}} = \lim\limits_{a\to -\infty} \dfrac{8}{1 - 2^a} = 8$.

Do $0 \neq 8$ nên $x = 0$ là điểm gián đoạn loại 1 của hàm số.

b) Hàm số đã cho không liên tục tại $x = 0$.

Nhận xét:

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} \arcsin x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} \arcsin x = 1$.

Do đó $x = 0$ là điểm gián đoạn loại 1 (bỏ được) của hàm số.

c) Hàm số đã cho không liên tục tại $x = 0$.

Xét hai dãy số x_n và y_n tiến đến 0^- khi $n \to +\infty$ với $x_n = \dfrac{-1}{n\pi}$ và $y_n = \dfrac{-2}{(4n+1)\pi}$.

Suy ra $\lim \dfrac{\sin \frac{1}{x_n}}{e^{\frac{1}{x_n}} + 1} = 0$ và $\lim \dfrac{\sin \frac{1}{y_n}}{e^{\frac{1}{y_n}} + 1} = -1$.

Do đó $0 \neq -1$ nên hàm số đã cho không có giới hạn trái tại $x = 0$.
Vậy $x = 0$ là điểm gián đoạn loại 2 của hàm số.

d) Hàm số đã cho không liên tục tại $x = 0$.
Xét $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} a.\dfrac{e^{ax}-1}{ax} = a$
Xét $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{bx}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} b.\dfrac{e^{bx}-1}{bx} = b$
Ta có: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-1}{x} + \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{bx}-1}{x} = a - b.$
Do đó $x = 0$ là điểm gián đoạn loại 1 (bỏ được) của hàm số.

Bài 19: Các hàm số sau đây có liên tục đều trên miền đã cho không?

a) $y = \dfrac{x}{4-x^2};\ -1 \leq x \leq 1$ b) $y = \ln x; 0 < x < 1$

Lời giải

a) Nhận xét: tập số thực $D = [-1; 1]$ là tập compact và hàm số $y = \dfrac{x}{4-x^2}$ liên tục trên tập D.
Do đó hàm số đã cho liên tục đều trên $[-1; 1]$.

b) Xét 2 dãy số $x_n = \dfrac{1}{n+1}$ và $y_n = \dfrac{1}{2n+2}$, dễ thấy $0 < x_n, y_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n - y_n| = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{2n+2}\right| = 0.$
Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty} |f(x_n) - f(y_n)| = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\ln\dfrac{1}{n+1} - \ln\dfrac{1}{2n+2}\right| = \ln 2 \neq 0.$
Do đó hàm số đã cho không liên tục đều trên $(0; 1)$.

1.8. Đạo hàm và vi phân

Bài 20: Tìm đạo hàm của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{nếu } x < 1 \\ (1-x)(2-x), & \text{nếu } 1 \leq x \leq 2 \\ x-2, & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$$

Lời giải

Dễ thấy $f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{nếu } x < 1 \\ 2x-3, & \text{nếu } 1 < x < 2 \\ 1, & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$

+) Tại điểm $x = 1$, ta có:
$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1-x-0}{x-1} = -1$
$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(1-x)(2-x)-0}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} (x-2) = -1$
Vì $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = -1 \Rightarrow f'(1) = -1$
+) Tại điểm $x = 2$, ta có:

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{(1-x)(2-x)-0}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-}(x-1) = 1$
$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)-0}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} 1 = 1$
Vì $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = 1 \Rightarrow f'(2) = 1$

Do đó ta kết luận $f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{nếu } x \le 1 \\ 2x-3, & \text{nếu } 1 < x < 2 \\ 1, & \text{nếu } x \ge 2 \end{cases}$

Bài 21: Tìm $f'(x)$ biết $\dfrac{d}{dx}[f(2017x)] = x^2$

Lời giải

Theo bài ta có: $\dfrac{d}{da}[f(2017a)] = a^2$
$\Rightarrow \dfrac{d}{d(2017a)}[f(2017a)].\dfrac{d(2017a)}{da} = a^2$
$\Rightarrow f'(2017a).2017 = a^2$
$\Rightarrow f'(2017a) = \dfrac{a^2}{2017}$
Với $a = \dfrac{x}{2017}$ thì $f'(x) = \dfrac{x^2}{2017^3}$.
Vậy $f'(x) = \dfrac{x^2}{2017^3}$.

Bài 22: Cho $n \in \mathbb{Z}$. Với điều kiện nào thì hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\dfrac{1}{x}, & \text{nếu } x \ne 0 \\ 0, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

a) liên tục tại $x = 0$
b) khả vi tại $x = 0$
c) có đạo hàm liên tục tại $x = 0$

Lời giải

a)
Trường hợp 1: $n < 0$
Đặt $x = \dfrac{1}{\dfrac{(2k+1)\pi}{2}}$ với $k \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó, vì $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{k\to+\infty} \left[\dfrac{(2k+1)\pi}{2}\right]^{-n} = +\infty$ nên hàm số đã cho không liên tục tại $x = 0$.
Trường hợp 2: $n = 0$
Xét hai dãy số x_k và y_k tiến đến 0 khi $k \to +\infty$ với $x_n = \dfrac{1}{\left(2k+1+\dfrac{1}{2}\right)\pi}$ và $y_n = \dfrac{1}{\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)\pi}$.

Suy ra $\lim\limits_{k\to+\infty} f(x_k) = -1$ và $\lim\limits_{k\to+\infty} f(y_k) = 1$.
Do đó $1 \ne -1$ nên hàm số đã cho không liên tục tại $x = 0$.
Trường hợp 3: $n > 0$

Do $0 \leq \left|x^n \sin\dfrac{1}{x}\right| \leq |x^n|$ và $\lim\limits_{x\to0}|x^n| = 0$ nên $\lim\limits_{x\to0} x^n \sin\dfrac{1}{x} = 0$.
Vậy với $n > 0$ thì hàm số đã cho liên tục tại $x = 0$.

b)
Nhận xét: Hàm số đã cho khả vi tại $x = 0$ khi và chỉ khi giới hạn $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ tồn tại hữu hạn
$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0} x^{n-1}\sin\dfrac{1}{x}$ tồn tại hữu hạn.
Chứng minh tương tự câu a ta có $n > 1$. Vậy $n > 1$ là các giá trị cần tìm.

c)
Giả sử hàm số đã cho khả vi tại $x = 0$.
Khi đó $f'(x) = n.x^{n-1}.\sin\dfrac{1}{x} + x^{n-2}.\cos\dfrac{1}{x}$.
Để $f'(x)$ liên tục tại $x = 0$ thì điều kiện cần và đủ là các hàm số $x^{n-1}.\sin\dfrac{1}{x}$ và $x^{n-2}.\cos\dfrac{1}{x}$ phải liên tục tại $x = 0$.
Chứng minh tương tự câu a ta có $n > 1$ và $n > 2$. Điều này tương đương với $n > 2$.
Vậy $n > 2$ là các giá trị cần tìm.

Bài 23: Chứng minh rằng hàm số $f(x) = |x-a|\varphi(x)$, trong đó $\varphi(x)$ là một hàm số liên tục và $\varphi(a) \neq 0$, không khả vi tại điểm $x = a$

Lời giải

Nhận xét:
$f'(a^+) = \lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{(x-a)\varphi(x)}{x-a} = \varphi(a)$.
$f'(a^-) = \lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{(a-x)\varphi(x)}{x-a} = -\varphi(a)$.
Do $\varphi(a) \neq 0$ nên $\varphi(a) \neq -\varphi(a)$.
Vậy hàm số đã cho không khả vi tại $x = a$.

Bài 24: Tìm vi phân của hàm số:

a) $y = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}, (a \neq 0)$

b) $y = \arcsin\dfrac{x}{a}, (a \neq 0)$

c) $y = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|, (a \neq 0)$

d) $y = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right|$

Lời giải

a) $y = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}, (a \neq 0)$

$$dy = y'dx = \frac{1}{a}\frac{\frac{1}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx = \frac{dx}{a^2+x^2}.$$

b) $y = \arcsin\dfrac{x}{a}, (a \neq 0)$

$$dy = y'dx = \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}dx = \frac{|a|}{a\sqrt{a^2-x^2}}dx, \forall\,|x| < |a|\,.$$

c) $y = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|, (a \neq 0)$

Ta có: $y = \dfrac{1}{2a}\left(\ln|x-a| - \ln|x+a|\right)$.

$\Rightarrow dy = y'dx = \dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{1}{x-a} - \dfrac{1}{x+a}\right)dx = \dfrac{dx}{x^2-a^2}, \forall x \neq \pm a.$

d) $y = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right|$

$dy = y'dx = \dfrac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}dx = \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}}, \forall x^2 > -a.$

Bài 25: Tìm:

a) $\dfrac{d}{d(x^2)}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$

b) $\dfrac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$

c) $\dfrac{d}{d(x^3)}(x^3 - 2x^6 - x^9)$

Lời giải

a) $\dfrac{d}{d(x^2)}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$

$$\frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{d}{2xdx}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{1}{2x}\frac{d\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{dx} = \frac{1}{2x}\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{x\cos x - \sin x}{2x^3}, \forall x \neq 0.$$

b) $\dfrac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$

$$\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)} = \frac{-1}{\sin x}\frac{d(\sin x)}{dx} = \frac{-1}{\sin x}.\cos x = -\cot x, \forall x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

c) $\dfrac{d}{d(x^3)}(x^3 - 2x^6 - x^9)$

$$\frac{d}{d(x^3)}(x^3 - 2x^6 - x^9) = \frac{1}{3x^2}\frac{d(x^3 - 2x^6 - x^9)}{dx} = \frac{3x^2 - 12x^5 - 9x^8}{3x^2} = 1 - 4x^3 - 3x^6, \forall x \neq 0.$$

Bài 26: Tính gần đúng giá trị của các biểu thức:

a) $\sqrt[3]{7,97}$

b) $\sqrt[7]{\dfrac{2-0,02}{2+0,02}}$

c) $\sqrt{3e^{0,04} + 1,02^2}$

Lời giải

a) $\sqrt[3]{7,97}$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \forall x \neq 0.$

Chọn $x_0 = 8, \triangle x = -0,03$. Áp dụng công thức tính gần đúng:

$$\sqrt[3]{7,97} = f(x_0 + \triangle x) \approx f(x_0) + \triangle x f'(x_0) = \sqrt[3]{8} + (-0,03).\frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = 1,9975.$$

b) $\sqrt[7]{\dfrac{2-0,02}{2+0,02}}$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt[7]{\dfrac{2-x}{2+x}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-4}{(2+x)^2}\dfrac{1}{7.\sqrt[7]{\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)^6}}, \forall x \neq \pm 2.$

Chọn $x_0 = 0, \triangle x = 0,02$. Áp dụng công thức tính gần đúng:
$\sqrt[7]{\dfrac{2-0,02}{2+0,02}} = f(x_0+\triangle x) \approx f(x_0) + \triangle x f'(x_0) = \sqrt[3]{\dfrac{2}{2}} + 0,02.\dfrac{-4}{2^2}.\dfrac{1}{7\sqrt[7]{1^6}} = 1 - \dfrac{0,02}{7} \approx 0,99714.$

c) $\sqrt{3e^{0,04} + 1,02^2}$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{3e^{2x} + (1+x)^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{3e^{2x}+1+x}{\sqrt{3e^{2x}+(1+x)^2}}.$

Chọn $x_0 = 0, \triangle x = 0,02$. Áp dụng công thức tính gần đúng:
$\sqrt{3e^{0,04} + 1,02^2} = f(x_0+\triangle x) \approx f(x_0) + \triangle x f'(x_0) = \sqrt{4} + 0,02.\dfrac{4}{\sqrt{4}} = 2,04.$

Bài 27: Nếu $C(x)$ là chi phí sản xuất của x đơn vị một mặt hàng nào đó. Khi đó chi phí biên là $C'(x)$ cho biết chi phí phải bỏ ra khi muốn tăng sản lượng thêm một đơn vị. Cho hàm chi phí $C(x) = 2000 + 3x + 0,01x^2 + 0,0002x^3$. Tìm hàm chi phí biên, xác định chi phí biên tại $x = 100$, giá trị đó nói lên điều gì?

Lời giải

Hàm chi phí biên: $C'(x) = 3 + 0,02x + 0,0006x^2 \Rightarrow C'(100) = 11$.
Chi phí biên tại $x = 100$ là 11, ý nghĩa là kinh tế của giá trị này là: Nếu muốn tăng mức sản lượng thêm 1 đơn vị từ mức sản lượng là 100 đơn vị thì phải tăng chi phí lên khoảng 11 đơn vị.

Bài 28: Tìm đạo hàm cấp cao của các hàm số:

a) $y = \dfrac{x^2}{1-x}$, tính $y^{(8)}$

b) $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, tính $y^{(100)}$

c) $y = \ln(2x - x^2)$, tính $y^{(5)}$

d) $y = x^2 \sin x$, tính $y^{(50)}$

e) $y = e^{x^2}$, tính $y^{(10)}(0)$

f) $y = x\ln(1+2x)$, tính $y^{(10)}(0)$

Lời giải

a) $y = \dfrac{x^2}{1-x}$, tính $y^{(8)}$
TXĐ: $x \neq 1$
Ta có: $y = \dfrac{x^2}{1-x} = -(x+1) + \dfrac{1}{1-x}$
$\Rightarrow y^{(8)}(x) = 0 + \dfrac{(-1)^8(-1)^8.8!}{(1-x)^9} = \dfrac{40320}{(1-x)^9}, \forall x \neq 1$

b) $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, tính $y^{(100)}$
TXĐ: $x < 1$

Ta có: $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{2-(1-x)}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{2}{\sqrt{1-x}} - \sqrt{1-x} = 2\Big(1-x\Big)^{\frac{-1}{2}} - \Big(1-x\Big)^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow y^{(100)}(x) = 2.(-1)^{100}.\dfrac{-1}{2}.\dfrac{-3}{2}.....\dfrac{-199}{2}.\Big(1-x\Big)^{\frac{-201}{2}} - (-1)^{100}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{-1}{2}.....\dfrac{-197}{2}.\Big(1-x\Big)^{\frac{-199}{2}}$

$\Rightarrow y^{(100)}(x) = \dfrac{1}{2^{100}}.\left[\dfrac{2.199!!}{\sqrt{(1-x)^{201}}} + \dfrac{197!!}{\sqrt{(1-x)^{199}}}\right] = \dfrac{197!!(399-x)}{2^{100}\sqrt{(1-x)^{201}}}, \forall x < 1$

c) $y = \ln(2x - x^2)$, tính $y^{(5)}$

TXĐ: $0 < x < 2$

Ta có: $y^{(5)} = \Big(\ln(2x-x^2)\Big)^{(5)} = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-2}\right)^{(4)} = \dfrac{(-1)^4.4!}{x^5} + \dfrac{(-1)^4.4!}{(x-2)^5}$

$\Rightarrow y^{(5)} = \dfrac{4!}{x^5} + \dfrac{4!}{(x-2)^5}, \forall 0 < x < 2$

d) $y = x^2 \sin x$, tính $y^{(50)}$

Áp dụng công thức Leibniz, ta có

$y^{(50)} = \sum\limits_{k=0}^{50} C_{50}^k.(x^2)^{(k)}.(\sin x)^{(50-k)} = C_{50}^0.x^2.(\sin x)^{(50)} + C_{50}^1.(x^2)'.(\sin x)^{(49)} + C_{50}^2.(x^2)''.(\sin x)^{(48)}$

$\Rightarrow y^{(50)} = x^2.\sin\left(x + \dfrac{50\pi}{2}\right) + 50.2x.\sin\left(x + \dfrac{49\pi}{2}\right) + 1225.2\sin\left(x + \dfrac{48\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow y^{(50)} = (2450 - x^2)\sin x + 100x\cos x, \forall x \in \mathbb{R}$

e) $y = e^{x^2}$, tính $y^{(10)}(0)$

Sử dụng khai triển Maclaurin ta có:

$y = e^{x^2} = 1 + \dfrac{x^2}{1!} + \dfrac{(x^2)^2}{2!} + \dfrac{(x^2)^3}{3!} + ... + \dfrac{(x^2)^5}{5!} + o\Big((x^2)^5\Big)$

$\Rightarrow y = e^{x^2} = 1 + \dfrac{x^2}{1!} + \dfrac{x^4}{2!} + \dfrac{x^6}{3!} + ... + \dfrac{x^{10}}{5!} + o\Big(x^{10}\Big)$

$\Rightarrow$ hệ số của $x^{10} = \dfrac{y^{(10)}(0)}{10!} = \dfrac{1}{5!} \Rightarrow y^{(10)}(0) = \dfrac{10!}{5!} = 30240$

f) $y = x\ln(1+2x)$, tính $y^{(10)}(0)$

Sử dụng khai triển Maclaurin ta có:

$y = x\ln(1+2x) = x.\left[x - \dfrac{(2x)^2}{2} + \dfrac{(2x)^3}{3} - ... + \dfrac{(2x)^9}{9} + o\big((2x)^9\big)\right]$

Hệ số của $x^{10} = \dfrac{y^{(10)}(0)}{10!} = \dfrac{2^9}{9} \Rightarrow y^{(10)}(0) = \dfrac{2^9}{9}.10! = 206438400$

Bài 29: Tính đạo hàm cấp n của các hàm số.

a) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$

b) $y = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$

c) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$

d) $y = e^{ax}\sin(bx+c)$

e) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

f) $y = x^{n-1}e^{1/x}$

Lời giải

a) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$

Ta có: $y = \dfrac{x}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}\right) \Rightarrow y^{(n)} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{(-1)^n.n!}{(x+1)^{n+1}} + \dfrac{(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}\right]$

$\Rightarrow y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n.n!}{2}\left[\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}} + \dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right], \forall x \neq \pm 1 (n \in \mathbb{N}^*)$

b) $y = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$

Ta có: $y = \dfrac{1}{x^2-3x+2} = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-1}$

$\Rightarrow y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n.n!}{(x-2)^{n+1}} - \dfrac{(-1)^n.n!}{(x-1)^{n+1}}, \forall x \notin \{1,2\} (n \in \mathbb{N}^*)$

c) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$

Ta có: $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}} = \dfrac{(1+x)-1}{\sqrt[3]{1+x}} = (1+x)^{2/3} - (1+x)^{-1/3}$. Do đó:

$$y^{(n)} = \frac{2}{3}.\left(\frac{2}{3}-1\right).....\left(\frac{2}{3}-n+1\right).(1+x)^{2/3-n} - \frac{-1}{3}.\left(\frac{-1}{3}-1\right).....\left(\frac{-1}{3}-n+1\right).(1+x)^{-1/3-n}$$

$$= \frac{2}{3^n}.(-1)^{n-1}.\frac{(3n-5)!!!}{\sqrt[3]{(1+x)^{3n-2}}} - \frac{(-1)^n(3n-2)!!!}{3^n}.\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^{3n+1}}}$$

$$= \frac{2}{3^n}.(-1)^{n-1}.\frac{(3n-2)!!!}{3n-2}.\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^{3n-2}}} - \frac{(-1)^n(3n-2)!!!}{3^n}.\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^{3n+1}}}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(3n-2)!!!}{3^n\sqrt[3]{(1+x)^{3n+1}}}\left[\frac{1}{3n-2}(2+2x)+1\right]$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(3n-2)!!!}{3^n(3n-2)\sqrt[3]{(1+x)^{3n+1}}}(2x+3n), \forall x \in \mathbb{R} (n \in \mathbb{N}^*)$$

d) $y = e^{ax}\sin(bx+c)$

Nếu $a = b = 0$ thì $y = \sin c \Rightarrow y^{(n)} = 0, \forall x \in \mathbb{R} (n \in \mathbb{N}^*)$

Nếu $a^2+b^2 \neq 0$. Chọn θ sao cho $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Ta sử dụng phép quy nạp để chứng minh mệnh đề sau:

$y^{(n)} = e^{ax}(\sqrt{a^2+b^2})^n \sin(bx+c+n\theta), \forall x \in \mathbb{R} (n \in \mathbb{N}^*)$ (*)

Thật vậy, ta có:

$y' = ae^{ax}.\sin(bx+c) + e^{ax}.b\cos(bx+c) = e^{ax}[a\sin(bx+c) + b\cos(bx+c)]$

$$= e^{ax}.\sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(bx+c) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(bx+c)\right]$$

$$= e^{ax}.\sqrt{a^2+b^2}[\cos\theta\sin(bx+c) + \sin\theta\cos(bx+c)]$$

$$= e^{ax}.\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+c+\theta), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow$ Mệnh đề (*) đúng với $n = 1$ (1)

Giả sử (*) đúng với $n = k \geq 1$, tức là: $y^{(k)} = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^k \sin(bx+c+k\theta), \forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} &= \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^k \left[ae^{ax}\sin(bx+c+k\theta) + e^{ax}.b\cos(bx+c+k\theta)\right] \\ &= e^{ax}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^k \left[a\sin(bx+c+k\theta) + b\cos(bx+c+k\theta)\right] \\ &= e^{ax}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^{k+1} \left[\cos\theta\sin(bx+c+k\theta) + \sin\theta\cos(bx+c+k\theta)\right] \\ &= e^{ax}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^{k+1} \sin(bx+c+(k+1)\theta), \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ mệnh đề (*) đúng với $n = k+1$ (2).

Từ (1), (2) suy ra mệnh đề (*) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Kết hợp hai trường hợp lại, ta có kết quả tổng quát cho cả hai trường hợp là:

$$y^{(n)} = e^{ax}(\sqrt{a^2+b^2})^n \sin(bx+c+n\theta), \forall x \in \mathbb{R}(n \in \mathbb{N}^*)$$

e) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

Ta có: $y = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\cos(4x)$. Do đó:

$y^{(n)} = 4^{n-1}\cos\left(4x + \dfrac{n\pi}{2}\right), \forall x \in \mathbb{R}(n \in \mathbb{N}^*)$

f) $y = x^{n-1}e^{1/x}$

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp: $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}, \forall x \neq 0 (n \in \mathbb{N}^*)$ (*) .

Thật vậy:

+) Với $n = 1$ ta có: $y_1 = e^{1/x} \Rightarrow y_1' = \dfrac{-e^{1/x}}{x^2} \Rightarrow$ mệnh đề (*) đúng với $n = 1$ (1)

+) Với $n = 2$ ta có: $y_2 = xe^{1/x} \Rightarrow y_2' = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)e^{1/x} \Rightarrow y_2^{(2)} = \dfrac{e^{1/x}}{x^3} \Rightarrow$ mệnh đề (*) đúng với $n = 2$ (2).

+) Giả sử đúng với mọi $n = 1, 2, ..., k (k \geq 3)$, tức là: $y_m^{(m)} = \dfrac{(-1)^m e^{1/x}}{x^{m+1}}, \forall m = \overline{1, k}$.

Cụ thể, ta sử dụng: $y_k^{(k)} = \dfrac{(-1)^k e^{1/x}}{x^{k+1}}$ và

$$y_{k-1}^{(k-1)} = \frac{(-1)^{k-1}e^{1/x}}{x^k} \Rightarrow y_{k-1}^{(k)} = (-1)^k e^{1/x}\left(\frac{k}{x^{k+1}} + \frac{1}{x^{k+2}}\right)$$

.

Ta tiếp tục có: $y_{k+1} = x^k e^1 \Rightarrow y_{k+1}' = kx^{k-1}e^{1/x} - x^{k-2}e^{1/x} = ky_k - y_{k-1}$. Suy ra:

$y_{k+1}^{(k+1)} = ky_k^{(k)} - y_{k-1}^{(k)} = k.\dfrac{(-1)^k e^{1/x}}{x^{k+1}} - (-1)^k e^{1/x}\left(\dfrac{k}{x^{k+1}} + \dfrac{1}{x^{k+2}}\right) = \dfrac{(-1)^{k+1}e^{1/x}}{x^{k+2}}$

$\Rightarrow$ mệnh đề (*) đúng với $n = k+1$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra mệnh đề (*) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Vậy, $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}, \forall x \neq 0 (n \in \mathbb{N}^*)$

Bài 30: Tìm vi phân cấp cao của hàm số.

a) $y = (2x+1)\sin x$. Tính $d^{10}y(0)$.

b) $y = x^9 \ln x$. Tính $d^{10}y(1)$.

c) $y = e^x \cos x$. Tính $d^{20}y(0)$.

d) $y = x^2 e^{ax}$. Tính $d^{20}y(0)$.

Lời giải

a) $y = (2x+1)\sin x$.

Khai triển Maclaurin của y là: $y = (2x+1)\left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dfrac{x^9}{9!} + o(x^{11})\right)$

$\Rightarrow$ hệ số của x^{10} trong khai triển trên là:

$a_{10} = \dfrac{2}{9!} = \dfrac{y^{(10)}(0)}{10!} \Rightarrow y^{(10)}(0) = 20 \Rightarrow d^{(10)}y(0) = y^{(10)}(0)dx^{10} = 20dx^{10}$.

b) $y = x^9 \ln x$.

Áp dụng công thức Leibnitz, ta có:

$$y^{(10)} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (x^9)^{(k)} (\ln x)^{(10-k)} = \sum_{k=0}^{9} C_{10}^k . \frac{9!}{(9-k)!} x^{9-k} . \frac{(-1)^{11-k}(9-k)!}{x^{10-k}} = 9! \sum_{k=0}^{9} \frac{(-1)^{1-k} C_{10}^k}{x}$$

$\Rightarrow y^{(10)}(1) = 9! \sum_{k=0}^{9} (-1)^{1-k} C_{10}^k = 9! = 362880$

$\Rightarrow d^{10}y(1) = y^{(10)}(1)dx^{10} = 362880dx^{10}$

c) $y = e^x \cos x$.

Khai triển Maclaurin của y là: $y = \left[\left(\sum_{k=0}^{20} \dfrac{x^k}{k!} + o(x^{20})\right)\right] . \left[\left(\sum_{h=0}^{10} \dfrac{(-1)^h x^{2h}}{(2h)!}\right) + o(x^{20})\right]$

$\Rightarrow$ hệ số của x^{20} trong khai triển trên là: $a_{20} = \sum_{h=0}^{10} \left[\dfrac{1}{(20-2h)!} . \dfrac{(-1)^h}{(2h)!}\right]$

$$y^{(20)}(0) = 20! a_{20} = \sum_{h=0}^{10} \left[(-1)^h . \frac{20!}{(20-2h)!(2h)!}\right] = \sum_{h=0}^{10} \left[(-1)^h C_{20}^{2h}\right] = -1024.$$

$\Rightarrow d^{20}y(0) = y^{(20)}(0)dx^{20} = -1024dx^{20}$

d) $y = x^2 e^{ax}$.

Khai triển Maclaurin: $y = x^2 \left[\left(\sum_{k=1}^{18} \dfrac{(ax)^k}{k!}\right) + o(x^{18})\right] = \left(\sum_{k=1}^{18} \dfrac{a^k}{k!} x^{k+2}\right) + o(x^{20})$

$\Rightarrow$ hệ số của x^{20} trong khai triển của y là: $b_{20} = \dfrac{a^{18}}{18!} = \dfrac{y^{(20)}(0)}{20!} \Rightarrow y^{(20)}(0) = \dfrac{20!}{18!} a^{18} = 380a^{18}$

$\Rightarrow d^{20}y(1) = y^{(20)}(1)dx^{20} = 380a^{18}dx^{20}$.

Bài 31: Trong một hồ nuôi cá, cá trong hồ liên tục được sinh ra và khai thác. Số lượng cá trong hồ P được mô tả bởi phương trình:$P'(t) = r_0 \left(1 - \dfrac{P(t)}{P_C}\right) P(t) - \beta P(t)$, với r_0 là tỷ lệ sinh sản, P_C là số lượng cá lớn nhất hồ có thể duy trì, β là tỷ lệ khai thác. Cho $P_C = 10000$, tỷ lệ sinh sản và tỷ lệ khai thác tương ứng là 5% và 4%. Tìm số lượng cá ổn định.

Lời giải

Với $r_0 = \dfrac{5}{100}, \beta = \dfrac{4}{100}, P_C = 10000$, ta có:

$P'(t) = \dfrac{5}{100}\left(1 - \dfrac{P(t)}{10000}\right) P(t) - \dfrac{4}{100} P(t) = \dfrac{[2000 - P(t)]P(t)}{200000}$.

Lượng cá ổn định $\Leftrightarrow P'(t) = 0, \forall t \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{[2000 - P(t)]P(t)}{200000} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P(t) = 0, \forall t \geq 0 \\ P(t) = 2000, \forall t \geq 0 \end{array}\right.$
Vậy số lượng cá ổn định là 0 hoặc 2000

1.9 Các định lý về hàm khả vi và ứng dụng

Bài 32: Chứng minh rằng $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, phương trình

$$a \cos x + b \cos 2x + c \cos 3x = 0$$

có nghiệm trong khoảng $(0, \pi)$.

Lời giải

Xét hàm $F(x) = a \sin x + \dfrac{b \sin 2x}{2} + \dfrac{c \sin 3x}{3}$

Ta thấy: $\begin{cases} \text{F(x) khả vi trên } (0, \pi) \\ \text{F(x) liên tục trên } [0, \pi] \\ \text{F(0) = F}(\pi) = 0 \end{cases}$

Áp dụng định lý Rolle: $\exists x_0 \in (0, \pi)$ sao cho $F'(x_0) = 0$
$\Leftrightarrow \exists x_0 \in (0, \pi)$ sao cho $a \cos x + b \cos 2x + c \cos 3x = 0$ (ĐPCM)

Bài 33: Chứng minh rằng phương trình $x^n + px + q = 0$ với n nguyên dương, $n \geq 2$, không thể có quá 2 nghiệm thực nếu n chẵn, không thể có quá 3 nghiệm thực nếu n lẻ.

Lời giải

Đặt $F(x) = x^n + px + q = 0$
$\Rightarrow F'(x) = nx^{n-1} + p = 0$
$\Leftrightarrow x^{n-1} = \dfrac{-p}{n}$
Nếu n chẵn thì $F'(x) = 0$ có duy nhất 1 nghiệm

$\Rightarrow F(x)$ có không quá 2 nghiệm (1)

Nếu n lẻ thì $F'(x) = 0$ có tối đa 2 nghiệm

$\Rightarrow F(x)$ có không quá 3 nghiệm (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ ĐPCM

Bài 34: Cho ba số thực a, b, c thoả mãn $a+b+c = 0$. Chứng minh rằng phương trình $8ax^7 + 3bx^2 + c = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0, 1)$.

Lời giải

Xét $F(x) = ax^8 + bx^3 + cx = 0$

Ta thấy $\begin{cases} \text{F(x) liên tục trên [0, 1]} \\ \text{F(x) khả vi trên (0, 1)} \\ \text{F(0) = F(1) = 0} \end{cases}$

Áp dụng định lý Rolle: $\exists x_0 \in (0,1)$ sao cho $F'(x_0) = 0$

$\Leftrightarrow \exists x_0 \in (0,1)$ thoả mãn $8ax_0^7 + 3bx_0^2 + c = 0$

Bài 35: Giải thích tại sao công thức Cauchy dạng $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ không áp dụng được đối với các hàm $f(x) = x^2, g(x) = x^3, -1 \leq x \leq 1$.

Lời giải

Do $g'(x) = 3x^2$ và $\exists x_0 = 0 \in (-1,1), g'(0) = 0$ nên không áp dụng được công thức Cauchy trong trường hợp này.

Bài 36: Chứng minh các bất đẳng thức

a) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$
b) $\dfrac{a-b}{a} < \ln\dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b}, 0 < b < a$
c) $\dfrac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \dfrac{b-a}{1+a^2}, 0 < a < b$

Lời giải

a) TH1: $x = y \Rightarrow$ bất đẳng thức hiển nhiên đúng

TH2: $x \neq y$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x < y$

Xét $f(t) = \sin t, t \in [x, y]$

Ta thấy $\begin{cases} \text{f(t) liên tục trên [x, y]} \\ \text{f(t) khả vi trên (x, y)} \end{cases}$

Áp dụng định lý Lagrange: $\exists c \in (x,y)$ sao cho $f'(c) = \dfrac{\sin x - \sin y}{x - y}$

Bên cạnh đó, $f'(c) = \cos c \Rightarrow |f'(c)| \leq 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{\sin x - \sin y}{x - y}\right| \leq 1$

$\Leftrightarrow |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ (ĐPCM)

b) Xét $f(x) = \ln x, x \in [b, a]$

Ta thấy $\begin{cases} \text{f(x) liên tục trên [b, a]} \\ \text{f(x) khả vi trên (b, a)} \end{cases}$

Áp dụng định lý Lagrange: $\exists c \in (b,a)$ sao cho $f'(c) = \dfrac{\ln a - \ln b}{a - b} = \dfrac{\ln\dfrac{a}{b}}{a-b}$

Bên cạnh đó: $f'(c) = \dfrac{1}{c}; 0 < b < c < a \Rightarrow \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{b}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a} < \dfrac{\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)}{a-b} < \dfrac{1}{b} \Leftrightarrow \dfrac{a-b}{a} < \ln\dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b}$ (ĐPCM)

c) Xét $f(x) = \arctan x, x \in [a, b]$

Ta thấy $\begin{cases} \text{f(x) liên tục trên [a, b]} \\ \text{f(x) khả vi trên (a, b)} \end{cases}$

Áp dụng định lý Lagrange: $\exists c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = \dfrac{\arctan b - \arctan a}{b - a}$

Bên cạnh đó: $f'(c) = \dfrac{1}{1 + c^2}; 0 < a < c < b$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+a^2} \Rightarrow \frac{1}{1+b^2} < \frac{\arctan b - \arctan a}{b-a} < \frac{1}{1+a^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{a+a^2} \text{ (ĐPCM)}$$

Bài 37: Tồn tại hay không hàm số $f(x)$ sao cho $f(0) = -1, f(2) = 4$ và $f'(x) \leq 2$ với mọi x?

Lời giải

Áp dụng định lý Lagrange: $\exists x_0 \in (0, 2)$ sao cho $f'(x_0) = \dfrac{f(0) - f(2)}{0 - 2} = \dfrac{5}{2} > 2$

$\Rightarrow \nexists f(x)$ thoả mãn đề bài.

Bài 38: Tìm các giới hạn

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - \cos\frac{1}{x}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$

d) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\tan(\frac{\pi x}{2})}{\ln(1-x)}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \cos x)^{\tan x}$

g) $\lim\limits_{x \to 1} \tan(\dfrac{\pi x}{2}) \ln(2 - x)$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 2^x)^{\frac{1}{x}}$

i) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - a\tan^2 x)^{\frac{1}{x \sin x}}$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + 3^x)^{\tan\frac{1}{x}}$

Lời giải

a) $\text{L} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x + \sqrt{x}} - x}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

b) $L = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}$

Áp dụng quy tắc L'Hospital:

$$L \overset{(L)}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\dfrac{x-1}{x} + \ln x} \overset{(L)}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

c) Đặt $t = \dfrac{1}{x}$; khi $x \to \infty$ thì $t \to 0$

$$L = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}} - \cos\frac{1}{x}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \lim_{t\to 0}\frac{e^t - \cos t}{1 - \sqrt{1-t^2}} \overset{(L)}{=} \lim_{t\to 0}\frac{e^t + \sin t}{\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}} = \infty$$

d) $L = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\tan(\frac{\pi x}{2})}{\ln(1-x)}$

Áp dụng quy tắc L'Hospital:

$$L \overset{(L)}{=} \lim_{x\to 1^-}\frac{\pi(x-1)}{2\cos^2(\dfrac{\pi x}{2})} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\pi(x-1)}{\cos(\pi x) + 1} \overset{(L)}{=} \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{-\sin(\pi x)} = -\infty$$

e) $L = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$

Áp dụng quy tắc L'Hospital:

$$L \overset{(L)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x + e^x\cos x - 2x - 1}{3x^2} \overset{(L)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x + e^x\cos x + e^x\cos x - e^x\sin x - 2}{6x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x - 1}{3x} \overset{(L)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x - e^x\sin x}{3} = \frac{1}{3}$$

f) $L = \lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^{\tan x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln(1-\cos x).\tan x}$

Xét $M = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1-\cos x).\tan x = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\cos x)}{\dfrac{1}{\tan x}}$

$$\overset{(L)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{1-\cos x}}{\dfrac{-1}{\tan^2 x\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^3 x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^3}{\dfrac{-x^2}{2!}} = 0$$

$\Rightarrow L = 1$

g) L $= \lim\limits_{x\to 1} \tan(\frac{\pi x}{2}) \ln(2-x)$

Đặt $t = x - 1$; khi $x \to 1$ thì $t \to 0$

$$L = \lim_{t\to 0} \tan\left(\frac{\pi(t+1)}{2}\right) \ln(1-t)$$

$$= \lim_{t\to 0} \tan\left(\frac{\pi(t+1)}{2}\right).(-t) = \lim_{t\to 0} \frac{\tan\left(\frac{\pi(t+1)}{2}\right)}{\frac{1}{-t}}$$

$$\overset{(L)}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\pi}{2\cos^2\frac{\pi(t+1)}{2}}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{\pi t^2}{2\cos^2\frac{\pi(t+1)}{2}}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\pi t^2}{1+\cos(\pi t+\pi)} = \lim_{t\to 0} \frac{\pi t^2}{1-\cos(\pi t)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\pi t^2}{\frac{\pi^2 t^2}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

h) L $= \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+2^x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \ln(x^2+2^x)}$

Xét $L_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \ln(x^2+2^x)$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+2^x)}{x}$$

$$\overset{(L)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x+2^x\ln 2}{x^2+2^x}}{1} = \ln 2$$

$\Rightarrow L = e^{L_1} = 2$

i) L $= \lim\limits_{x\to 0} (1-a\tan^2 x)^{\frac{1}{x\sin x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1-a\tan^2 x)}{x\sin x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{-a\tan^2 x}{x^2}} = e^{-a}$

j) L $= \lim\limits_{x\to+\infty} (x^3+3^x)^{\tan\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \tan\frac{1}{x} \ln(x^3+3^x)}$

Xét $L_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \tan\frac{1}{x} \ln(x^3+3^x)$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \ln(x^3+3^x) \text{ (do } \tan\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x} \text{ khi } x \to +\infty)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^3+3^x)}{x}$$

$$\overset{(L)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x^2+3^x\ln 3}{x^3+3^x}}{1}$$

$$= \ln 3$$

$\Rightarrow L = e^{L_1} = 3$

Bài 39: Xác định a, b sao cho biểu thức sau có giới hạn hữu hạn khi $x \to 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3} - \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}.$$

Lời giải

I = $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3} - \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}\right)$ = $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3 - \sin^3 x - ax\sin^3 x - bx^2\sin^3 x}{x^3\sin^3 x}\right)$

Áp dụng khai triển Maclaurin ta có, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ khi $x \to 0$

$$\Rightarrow I = \lim_{x\to 0}\frac{x^3 - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 - ax\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 - bx^2\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3}{x^6}$$

$$\Rightarrow I = \lim_{x\to 0}\frac{x^5\left(\frac{1}{2} - b\right) - ax^4 - \frac{ax^6}{2} + o(x^6)}{x^6}$$

$$\Rightarrow I = \lim_{x\to 0}\frac{x^5\left(\frac{1}{2} - b\right) - ax^4 - \frac{ax^6}{2}}{x^6}$$

Để I có giới hạn hữu hạn $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \frac{1}{2} - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$

Bài 40. Cho f là một hàm số thực khả vi trên $[a, b]$ và có đạo hàm $f''(x)$ trên (a, b). Chứng minh rằng với mọi $x \in (a, b)$ có thể tìm được ít nhất 1 điểm $c \in (a, b)$ sao cho:

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = \frac{(x - a)(x - b)}{2}f''(c)$$

Lời giải

Đặt: $h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - \frac{(x - a)(x - b)}{2}\lambda$

$\Rightarrow h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - \lambda\left(x - \frac{a + b}{2}\right)$

Với $x_0 \in (a, b) \Rightarrow h(x_0) = f(x_0)f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_0 - a) - \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2}\lambda$

Chọn $\lambda = \dfrac{f(x_0) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_0 - a)}{\frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2}}$

Khi đó: $h(x_0) = h(a) = h(b)$

Ta có: $\begin{cases} h(x) \text{ liên tục trên } [a, x_0] \\ h(x) \text{ khả vi trên } (a, x_0) \end{cases}$

Áp dụng định lý Rolle: $\exists n \in (a, x_0)$ sao cho $h'(n) = 0$

Ta có: $\begin{cases} h(x) \text{ liên tục trên } [x_0, b] \\ h(x) \text{ khả vi trên } (x_0, b) \end{cases}$

Áp dụng định lý Rolle: $\exists m \in (x_0, b)$ sao cho $h'(m) = 0$

Lại có: $\begin{cases} h'(x) \text{ liên tục trên } [n,m] \\ h'(x) \text{ khả vi trên } (n,m) \end{cases}$

$\Rightarrow \exists c \in (n,m)$ sao cho $h"(c) = 0$

Suy ra: $h"(c) = f"(c) - \lambda = 0$

$\Rightarrow$ Với $x_0 \in (a,b)$ ta có: $f(x_0) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x_0 - a) = \dfrac{(x_0-a)(x_0-b)}{2} f''(c)$

$\Rightarrow$ Với mọi $x \in (a,b)$, tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) = \dfrac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c)$

Bài 41.Dùng phương pháp Newton tính $\sqrt[6]{2}$ đúng đến 8 chữ số thập phân sau dấu phẩy.

Lời giải

Ta đặt $f(x) = x^6 - 2$

Ta có : $\sqrt[6]{2}$ là nghiệm của $f(x) = 0, x \in [1,2]$

Mặt khác $f'(x) = 6x^5$

Theo Newton ta có $\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{x_n^6 - 2}{6x_n^5} \end{cases}$

$\Rightarrow x_1 = 1,677083333...$

$\Rightarrow x_2 = 1,422694413...$

...

$\Rightarrow x_7 = 1,122462048...$

$\Rightarrow x_8 = 1,122462048...$

Ta có: $|x_7 - x_8| < 10^{-8}$

Vậy theo yêu cầu bài toán thì $\sqrt[6]{2} = 1,122462048$

Bài 42. Giải thích tại sao phương pháp Newton không áp dụng trực tiếp để giải phương trình $x^3 - 2x + 2 = 0$ với xấp xỉ đầu $x_0 = 1$

Lời giải

Xét $f(x) = x^3 - 2x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2$

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Lại có: $f\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right), f\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) > 0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\Rightarrow f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x_0, x_0 < -\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Nên với $x_0 = 1$, $f'(x)$ đổi dấu $\Rightarrow$ Không áp dụng trực tiếp được để giải phương trình $f(x) = 0$.

Bài 43. Khảo sát tính đơn điệu của các hàm số

a) $y = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$

b) $y = \arctan x - \ln(1 + x^2)$

c) $y = x + |\sin 2x|, x \in [0, \pi]$

Lời giải

a) $y = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$

Tập xác định D = R

$y' = 4x^3 - 6x^2 + 2 = 0 \Rightarrow y'(-1).y'(0) < 0$

$\Rightarrow$ Hàm số không đơn điệu do đổi dấu trên R

b) $y = \arctan x - \ln(1 + x^2)$

Tập xác định D = R

$y' = \dfrac{1}{x^2+1} - \dfrac{2x}{1+x^2} \Rightarrow y'(0).y'(1) < 0$

$\Rightarrow$ y' đổi dấu trên R $\Rightarrow$ Hàm số không đơn điệu

c) $y = x + |\sin 2x|, x \in [0, \pi]$

Tập xác định D = R

Ta có $0 \leq \dfrac{\pi}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$

$y(0) = 0, y(\dfrac{\pi}{3}) = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}, y(\dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{\pi}{2}$

$(0) \leq y(\dfrac{\pi}{2}) \leq \dfrac{\pi}{3}$

$\Rightarrow$ Hàm số không đơn điệu trên $[0, \dfrac{\pi}{2}]$

Bài 44. Chứng minh các bất đẳng thức

a) $2x \arctan x \geq \ln(1 + x^2)$ với mọi x $\in R$

b) $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$ với mọi $x \geq 0$

c) $\cos x \leq 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}, \forall x \in [0, \dfrac{\pi}{2})$

Lời giải

a) Xét hàm số $f(x) = 2x - \ln(1 + x^2) \Rightarrow f'(x) = 2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Dễ thấy hàm số liên tục và có 1 cực tiểu duy nhất tại x = 0

Lại có: $f(0) = 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow$ Đpcm

b) Xét $f(x) = x - \ln(1 + x) \Rightarrow f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \geq 0$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $(0, +\infty)$

$\Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0 \Rightarrow x \geq \ln(1 + x)$

Xét hàm số $g(x) = \ln(1 + x) - x + \dfrac{x^2}{2} \Rightarrow g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x = \dfrac{-x^2 - 2x}{x+1}$

$\Rightarrow g'(x) \geq 0, \forall x \geq 0$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $(0, +\infty)$

$\Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0 \forall x \geq 0 \Rightarrow \ln(1 + x) \geq x - \dfrac{x^2}{2}$

c) Ta có $\cos(x) \leq 1 \Rightarrow sinx = \int_0^x \cos t dt \leq \int_0^x dt = x$

$1 - \cos x = \int_0^x \sin t dt \leq \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}$

$x - sinx = \int_0^x (1 - \cos t)dt \leq \int_0^x \frac{t^2}{2} dt = \frac{x^3}{6}$

$\Rightarrow \frac{x^2}{2} - 1 + cosx = \int_0^x (t - \sin t)dt \leq \int_0^x \frac{t^3}{6} dt = \frac{x^4}{24}$

$\Rightarrow \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ $\Rightarrow$Đpcm

Bài 45.Tìm cực trị hàm số

a) $y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$

b) $y = x - \ln(1 + x)$

c) $\sqrt[3]{(1 - x)(x - 2)^2}$

d) $y = x^{\frac{2}{3}} + (x - 2)^{\frac{2}{3}}$

Lời giải

a) Tập xác định $D = \mathbb{R}$

$y' = \frac{(6x + 4)(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(3x^2 + 4x + 4)}{(x^2 + x + 1)^2}$

$y' = 0 \Rightarrow x = -2$ hoặc $x = 0$

Hàm số đạt cực đại tại x = 0 với y(0) = 4

Hàm số đạt cực tiểu tại x = -2 với y(-2) = $\frac{8}{3}$

b) $y = x - \ln(x + 1)$

Tập xác định $D = (-1, \infty)$

$y' = 1 - \frac{1}{x + 1}$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0$

Ta có: $y' < 0, \quad \forall x \in (-1, 0), y' > 0 \quad \forall x \in (0; +\infty)$

$\Rightarrow$Hàm số đạt cực tiểu tại x = 0 với y(0) = 0

c) $y = \sqrt[3]{(1 - x)(x - 2)^2}$

$y' = \frac{1}{3}[(1 - x)(x - 2)^2]^{-\frac{2}{3}}[-(x - 2)^2 + 2(x - 2)(1 - x)]$

$= \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{[(1 - x)(x - 2)^2]^2}}(-3x^2 + 10x - 8)$

$y' = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$, các điểm y' không xác định: $x = 1, x = 2$

$y'(x)$ đổi dấu khi đi qua $x = \frac{4}{3}, x = 2$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{4}{3}$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$

d) $y = x^{\frac{2}{3}} + (x-2)^{\frac{2}{3}}$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

$y' = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$

$y' = 0 \Rightarrow x = 1$

y' không xác định tại $x = 0, x = 2$

y' đổi dấu khi đi qua $x = 0, x = 1, x = 2$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và $x = 2$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$

Bài 46. Cho $f(x)$ là hàm lồi trên đoạn $[a, b]$, chứng minh rằng $\forall c \in (a, b)$ ta có:

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \le \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$$

Lời giải

Ta có $\forall c \in (a, b)$ tồn tại duy nhất $t \in (0, 1)$ sao cho $c = ta + (1-t)b$

Do $f(x)$ là hàm lồi nên $f(c) = f(ta + (1-t)b) \le tf(a) + (1-t)f(b)$

$\Rightarrow \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \le \frac{tf(a) + (1-t)f(b) - f(a)}{ta + (1-t)b - a} = \frac{(1-t)(f(b) - f(a))}{(1-t)(b-a)} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Tương tự $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \le \frac{f(b) - f(c)}{b - c} \Rightarrow$ Đpcm

Bài 47: Chứng minh các bất đẳng thức sau

a) $\tan\frac{x+y}{2} \le \frac{\tan x + \tan y}{2}\ \forall x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$

b) $x\ln x + y\ln y \ge (x+y)\ln\frac{x+y}{2}\ \forall x, y > 0$

Lời giải

a) Xét hàm số $f(t) = \tan(t)$ với $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow f'(t) = \frac{1}{\cos^2(t)} \Rightarrow f''(t) = \frac{\sin(2t)}{\cos^4(t)} > 0, \forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow f(t)$ là hàm lồi trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow f\Big(\lambda x + (1-\lambda)y\Big) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \quad \forall x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

với : $\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \tan\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{\tan x + \tan y}{2}\ \forall x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

b) Ta có $f(t) = t\ln(t)$, TXĐ: $t > 0$

$\Rightarrow f'(t) = \ln(t) + 1 \Rightarrow f''(t) = \frac{1}{t} > 0, t \in$ TXĐ

$\Rightarrow f(t)$ là hàm lồi trên $(0, +\infty)$

$\Rightarrow f\Big(\lambda x + (1-\lambda)y\Big) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \quad x, y > 0$

với : $\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left(\frac{x+y}{2}\right)\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x) + f(y)}{2} = \frac{x\ln(x) + y\ln(y)}{2}$

$\Rightarrow (x+y)\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \le x\ln(x) + y\ln(y) \Rightarrow x\ln x + y\ln y \ge (x+y)\ln\frac{x+y}{2}\ \forall x, y > 0$

1.10 Khảo sát hàm số, đường cong

Bài 48: Tìm tiện cận của các đường cong sau

a) $y = \sqrt[3]{1+x^3}$

b) $y = \ln(1+e^{-x})$

c) $y = \dfrac{x^3 \operatorname{arccot} x}{1+x^2}$

d) $\begin{cases} x &= 2t - t^2 \\ y &= \dfrac{2016t^2}{1-t^3} \end{cases}$

e) $\begin{cases} x &= t \\ y &= t + 2\arctan t \end{cases}$

<u>**Lời giải**</u>

a) $y = \sqrt[3]{1+x^3}$

TXĐ $= \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.

Ta có:

+) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x} = 1$

$\Rightarrow$ Xét: $\lim\limits_{x\to\infty}(y-x) = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{1+x^3} - x = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{1+x^3}\right)^2 + x\sqrt[3]{1+x^3} + x^2} = 0$

$\Rightarrow$ Hàm số đã cho có một tiệm cận xiên là: $y = x$

+) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x} = 1$

$\Rightarrow$ Xét: $\lim\limits_{x\to-\infty}(y-x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{1+x^3} - x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{1+x^3}\right)^2 + x\sqrt[3]{1+x^3} + x^2} = 0$

$\Rightarrow$ Hàm số đã cho có một tiệm cận xiên là: $y = x$ (đã có)

Vậy hàm số đã cho có 1 tiệm cận xiên là $y = x$.

b) $y = \ln(1+e^{-x})$

TXĐ $= \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.

Ta có:

+) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+e^{-x}))}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{-x}}{x} = 0$

$\Rightarrow$ Xét: $\lim\limits_{x\to\infty} y = \lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(1+e^{-x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$

$\Rightarrow$ Hàm số đã cho có một tiệm cận ngang là: $y = 0$

+) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(1+e^{-x}))}{x} = L$

Xét $L_1 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(\ln(1+e^{-x}))'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{e^x+1} = -1$

$\Rightarrow$ Theo quy tắc L'Hospital, $L = L_1 = -1$

$\Rightarrow$ Xét: $\lim\limits_{x\to-\infty}(y+x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(1+e^{-x}\right) + x = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(e^x+1) = 0$

$\Rightarrow$ Hàm số đã cho có một tiệm cận xiên là: $y = -x$

Vậy hàm số đã cho có 1 tiệm cận ngang $y = 0$ và một tiệm cận xiên $y = -x$

c) $y = \dfrac{x^3 \operatorname{arccot} x}{1+x^2}$
TXĐ $= \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.
Ta có:

+) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 \operatorname{arccot} x}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arccot} x = 1 \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow$ Xét: $\lim\limits_{x\to\infty} y = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 \operatorname{arccot} x}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 \arctan \dfrac{1}{x}}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = 1$

$\Rightarrow$ Hàm số đã cho có một tiệm cận ngang là: $y = 1$

+) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 \operatorname{arccot} x}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arccot} x = 1 \cdot \pi = \pi$

$\Rightarrow$ Xét: $\lim\limits_{x\to-\infty} (y - \pi x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3 \operatorname{arccot} x}{1+x^2} - \pi x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3(\pi + \arctan \dfrac{1}{x} - \pi) - \pi x}{1+x^2}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 - \pi x}{1+x^2} = 1$

$\Rightarrow$ Hàm số đã cho có một tiệm cận xiên là: $y = \pi x + 1$

Vậy hàm số đã cho có 1 tiệm cận ngang $y = 1$ và một tiệm cận xiên $y = \pi x + 1$

d) $\begin{cases} x &= 2t - t^2 \\ y &= \dfrac{2016t^2}{1-t^3} \end{cases}$
ĐKXĐ: $1 - t^3 \neq 0 \Rightarrow t \neq 1$
Ta có:

+) $\lim\limits_{t\to1} x = \lim\limits_{t\to1} (2t - t^2) = 1, \quad \lim\limits_{t\to1} y = \lim\limits_{t\to1} \dfrac{2016t^2}{1-t^3} = \infty$

$\Rightarrow$ Hàm số có 1 tiệm cận đứng: $x = 1$

+) $\lim\limits_{t\to\infty} x = \lim\limits_{t\to\infty} (2t - t^2) = -\infty, \quad \lim\limits_{t\to\infty} y = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{2016t^2}{1-t^3} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{2016}{\dfrac{1}{t} - t} = 0$

$\Rightarrow$ Hàm số có 1 tiệm cận ngang: $y = 0$

+) $\lim\limits_{t\to-\infty} x = \lim\limits_{t\to\infty} (2t - t^2) = -\infty, \quad \lim\limits_{t\to-\infty} y = \lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{2016t^2}{1-t^3} = \lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{2016}{\dfrac{1}{t} - t} = 0$

$\Rightarrow$ Hàm số có 1 tiệm cận ngang: $y = 0$ (đã có)

Vậy hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng $x = 1$ và một tiệm cận ngang $y = 0$

e) $\begin{cases} x &= t \\ y &= t + 2\arctan t \end{cases}$
ĐKXĐ: $t \in \mathbb{R}$
Ta có:

+) $\lim\limits_{t\to\infty} x = \lim\limits_{t\to\infty} t = \infty, \quad \lim\limits_{t\to\infty} y = \lim\limits_{t\to\infty} (t + 2\arctan t) = \infty$

$\Rightarrow$ Xét $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t + 2\arctan t}{t} = 1$
$\Rightarrow$ Xét $\lim\limits_{t\to\infty} (y - x) = \lim\limits_{t\to\infty} (t + 2\arctan t - t) = \lim\limits_{t\to\infty} 2\arctan t = \pi$
$\Rightarrow$ Hàm số có 1 tiệm cận xiên: $y = x + \pi$

+) $\lim\limits_{t\to-\infty} x = \lim\limits_{t\to-\infty} t = -\infty, \quad \lim\limits_{t\to-\infty} y = \lim\limits_{t\to-\infty} (t + 2\arctan t) = -\infty$
$\Rightarrow$ Xét $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{t + 2\arctan t}{t} = 1$
$\Rightarrow$ Xét $\lim\limits_{t\to-\infty} (y - x) = \lim\limits_{t\to-\infty} (t + 2\arctan t - t) = \lim\limits_{t\to\infty} 2\arctan t = -\pi$
$\Rightarrow$ Hàm số có 1 tiệm cận xiên: $y = x - \pi$

Vậy hàm số đã cho có 2 tiệm cận xiên là $y = x + \pi$ và $y = x - \pi$

Bài 49: Khảo sát các hàm số, đường cong sau

a) $y = e^{\frac{1}{x} - x}$

b) $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$

d) $y = \dfrac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$

e) $\begin{cases} x &= \dfrac{2t}{1 - t^2} \\ y &= \dfrac{t^2}{1 + t} \end{cases}$

f) $\begin{cases} x &= 2t - t^2 \\ y &= 3t - t^3 \end{cases}$

g) $r = a + b\cos\varphi, (0 < a \le b)$

h) $r = a\sin 3\varphi, (a > 0)$

Lời giải

a) $y = e^{\frac{1}{x} - x}$

1) TXĐ $= \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Hàm số không chẵn, không lẻ, không tuần hoàn.

2) Xét $y' = \left(-\dfrac{1}{x^2} - 1\right) e^{\frac{1}{x} - x} = -\left(\dfrac{1}{x^2} + 1\right) e^{\frac{1}{x} - x} < 0 \forall x \in$ TXĐ.
$\Rightarrow$ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	‖	$-$
y	$+\infty \searrow 0$	‖	$+\infty \searrow 0$

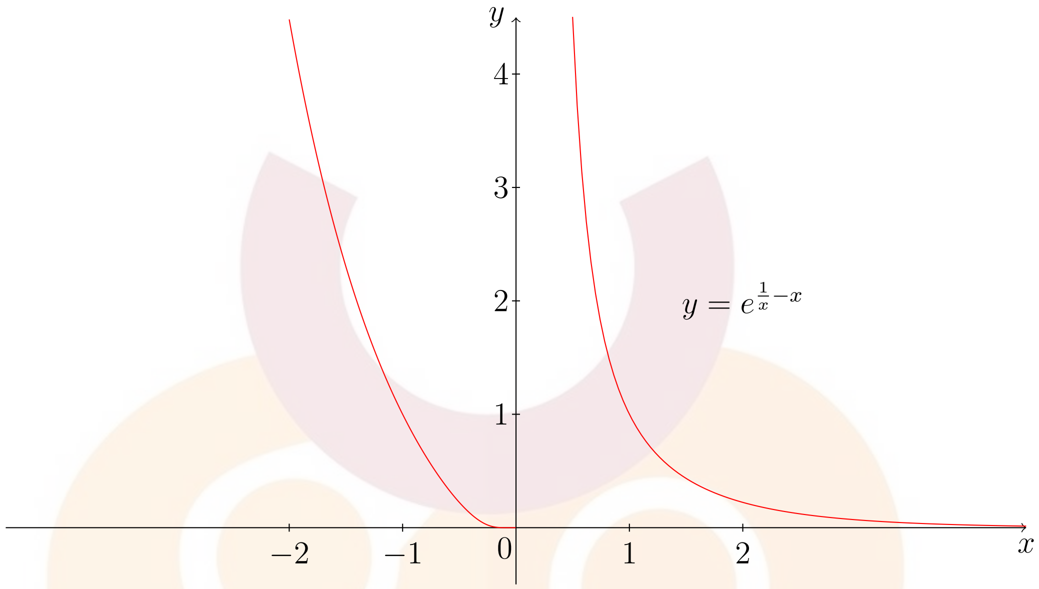
Hàm số không có cực trị và nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và $(0; \infty)$.

3) Hàm số có 1 tiệm cận đứng $x = 0$ và 1 tiệm cận ngang $y = 0$, không có tiệm cận xiên.

4) Bảng giá trị:

x	-2	-1	1	2
y	$e^{\frac{3}{2}}$	1	1	$e^{-\frac{3}{2}}$

5) Đồ thị hàm số:



b) $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$

1) TXĐ $= \mathbb{R}$
Hàm số không chẵn, không lẻ, không tuần hoàn.

2) Xét $y' = \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{3\left(\sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}\right)^2}$

$\Rightarrow y'$ không xác định $\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$. $\quad y' = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$.

$\Rightarrow$ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
y	$-\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{\frac{32}{27}}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số có 3 điểm cực trị gồm 2 cực tiểu là $x = -1$ và $x = 1$ và 1 cực đại là $x = -\dfrac{1}{3}$

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và $\left(-\dfrac{1}{3}; 1\right)$ và đồng biến trên $\left(-1; -\dfrac{1}{3}\right)$ và $(1; \infty)$.

3) Hàm số không có tiệm cận ngang và tiệm cận đứng.

Xét: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}}{x} = 1$

Xét: $\lim\limits_{x\to\infty} (y - x) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1} - x\right)$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2 - x + 1}{\left(\sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}\right)^2 + x\left(\sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}\right)x + x^2} = -\frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ Hàm số có 1 tiệm cận xiên là $y = x - \dfrac{1}{3}$.

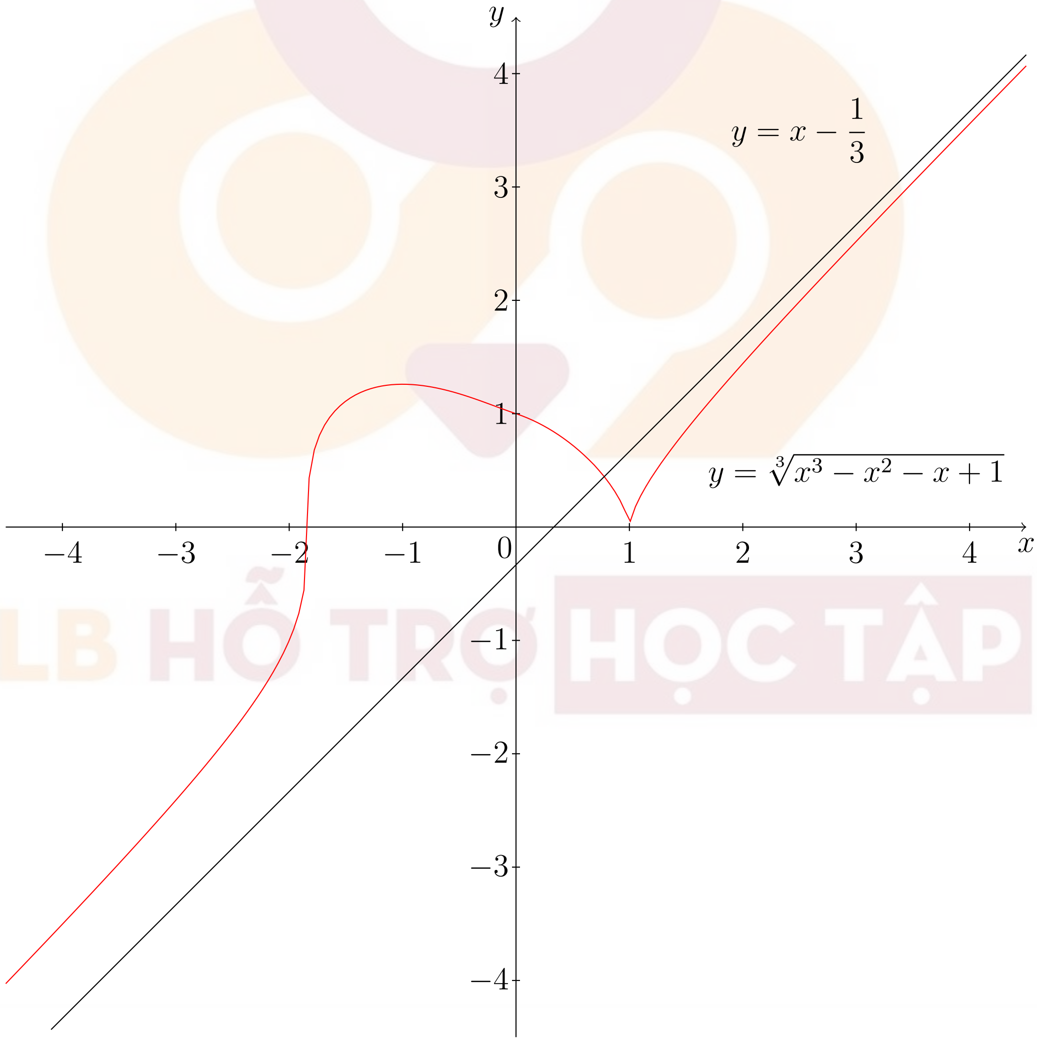
Tương tự khi $x \to -\infty$, ta được 1 tiệm cận xiên là: $y = x - \dfrac{1}{3}$.

Vậy hàm số có 1 tiệm cận xiên là $y = x - \dfrac{1}{3}$

4) Xét phương trình $y = 0 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số cắt Ox tại 2 điểm $(-1; 0)$ và $(1; 0)$
Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm $(0; 1)$
Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
y	$-\sqrt[3]{9}$	0	1	0	$\sqrt[3]{3}$

5) Đồ thị hàm số:



c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$

1) TXĐ $= \mathbb{R}$
Hàm số là hàm lẻ do $y(-x) = -y(x) \forall x \in$ TXĐ $\Rightarrow$ Đồ thị hàm số đối xứng qua O.

2) Xét $y' = \dfrac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2} \geq 0 \forall x \in$ TXĐ.

$\Rightarrow$ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$

Hàm số không có điểm cực trị và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

3) Xét $y'' = \dfrac{(4x^3+6x)(x^2+1) - 4x(x^4+3x^2)}{(x^2+1)^2} = 0$

$\Rightarrow x\left[(4x^2+6)(x^2+1) - 4(x^4+3x^2)\right] = 0 \Rightarrow x(-2x^2+6) = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$ (Đều là nghiệm đơn)

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có 3 điểm uốn $\left(-\sqrt{3}; -\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0,0)$, $\left(\sqrt{3}; \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

4) Hàm số không có tiệm cận ngang và tiệm cận đứng.

Xét: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = 1$

Xét: $\lim\limits_{x\to\infty} (y - x) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{1+x^2} - x\right)$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x}{1+x^2} = 0$

$\Rightarrow$ Hàm số có 1 tiệm cận xiên là $y = x$.

Tương tự khi $x \to -\infty$, ta được 1 tiệm cận xiên là: $y = x$.

Vậy hàm số có 1 tiệm cận xiên là $y = x$

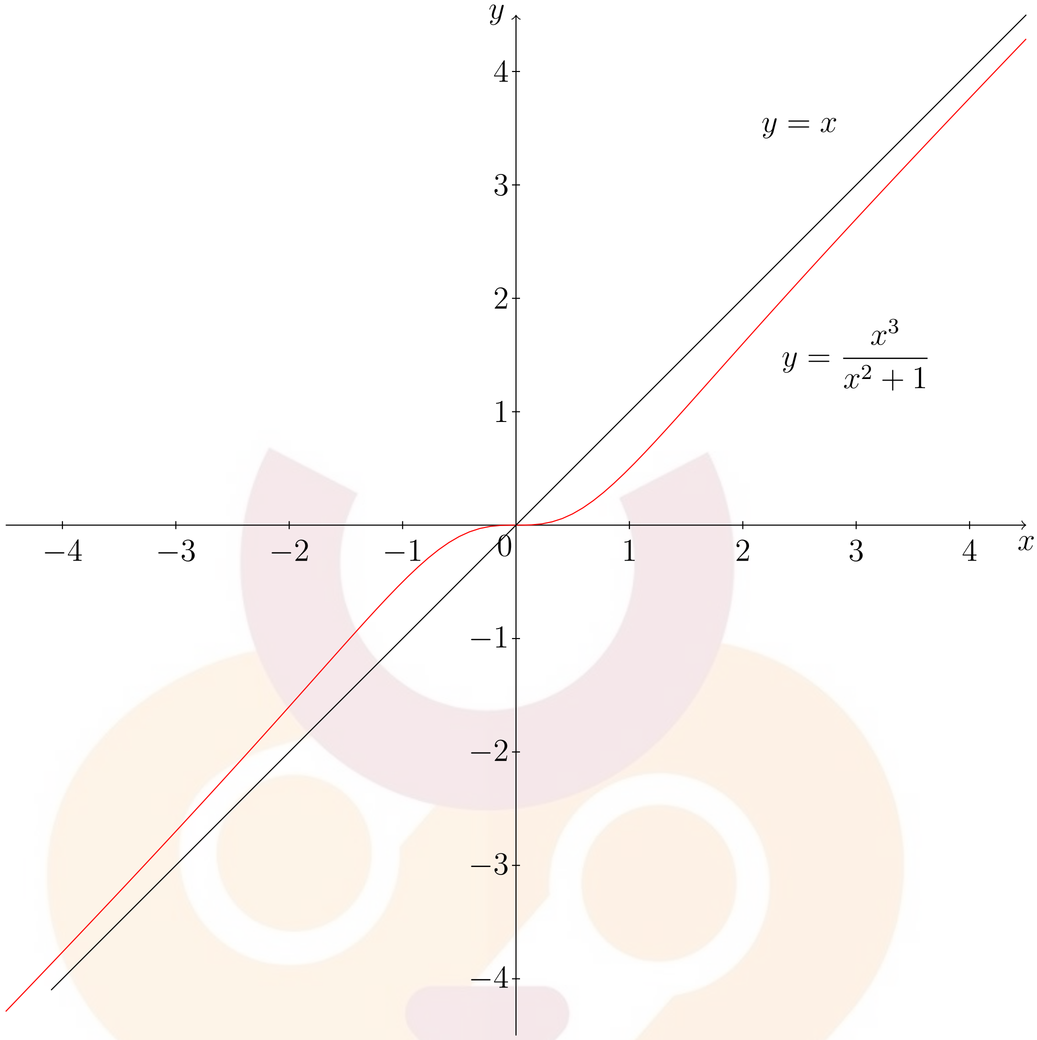
5) Xét phương trình $y = 0 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số cắt Ox tại 1 điểm $(0; 0)$

Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm $(0; 0)$

Bảng giá trị:

x	0	1	2
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{5}$

6) Đồ thị hàm số:



d) $y = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$

1) TXĐ $= \mathbb{R}$
Hàm số không chẵn, không lẻ, không tuần hoàn.

CLB HỖ TRỢ HỌC TẬP

2) Xét $y' = \dfrac{2x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$
$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.
$\Rightarrow$ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	-1	$\searrow$	$-\sqrt{5}$	$\nearrow$	1

Hàm số có 1 điểm cực tiểu là $x = -\dfrac{1}{2}$
Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right)$ và đồng biến trên $\left(-\dfrac{1}{2}; \infty\right)$.

3) Xét $y'' = 0 \Rightarrow \dfrac{-4x^2 - 3x + 2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}} = 0 \Rightarrow -4x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{41}}{8}$ (Đều là nghiệm đơn)

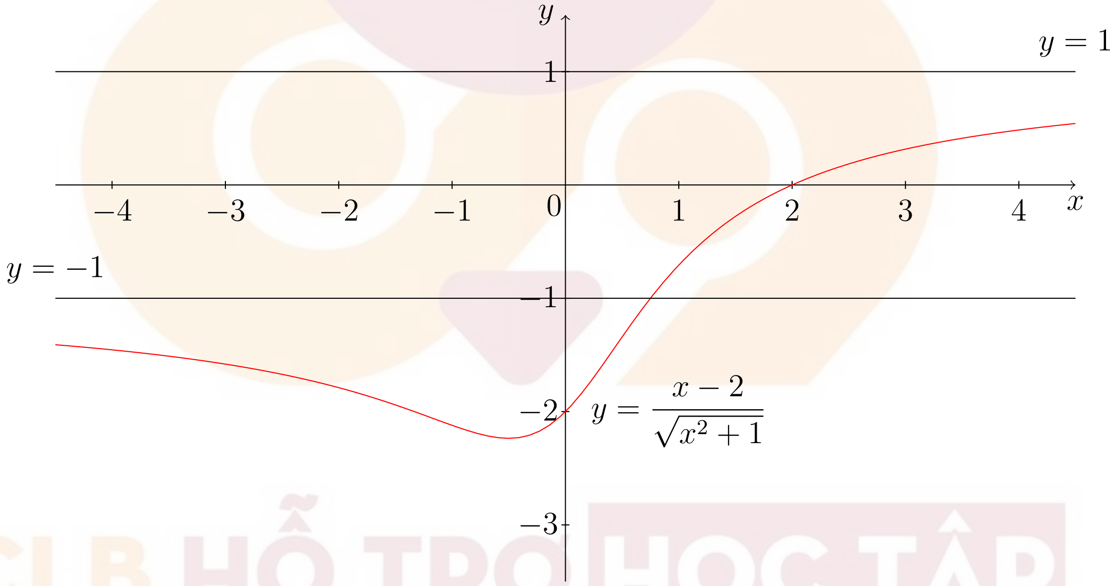
$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có 2 điểm uốn ứng với $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{41}}{8}$

4) Hàm số không có tiệm cận đứng, tiệm cận xiên và có 2 tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = -1$.

5) Xét phương trình $y = 0 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số cắt Ox tại 1 điểm $(2; 0)$
Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm $(0; -2)$
Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
y	$-\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$	$-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$	-2	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	0

6) Đồ thị hàm số:



e) $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1-t^2} \\ y = \dfrac{t^2}{1+t} \end{cases}$

1) ĐKXĐ: $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$
Hàm số $x(t)$ là hàm lẻ.
Hàm số $y(t)$ không chẵn, không lẻ, không tuần hoàn.

2) • Xét $x'_t = \dfrac{2t^2 + 2}{(1-t^2)^2}$
$\Rightarrow x'_t$ không xác định $\Leftrightarrow t = \pm 1$.
$\Rightarrow$ Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x'_t		$+$	||	$+$	||	$+$	
x	0	$\nearrow$	∞ || $-\infty$	$\nearrow$	∞ || $-\infty$	$\nearrow$	0

Hàm số $x(t)$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

- Xét $y'_t = \dfrac{t^2+2t}{(1+t)^2}$
  $\Rightarrow y'_t$ không xác định $\Leftrightarrow t=-1$.
  $y'_t = 0 \Leftrightarrow t=0 \vee t=-2$.
  $\Rightarrow$ Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'_t		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$ || ∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

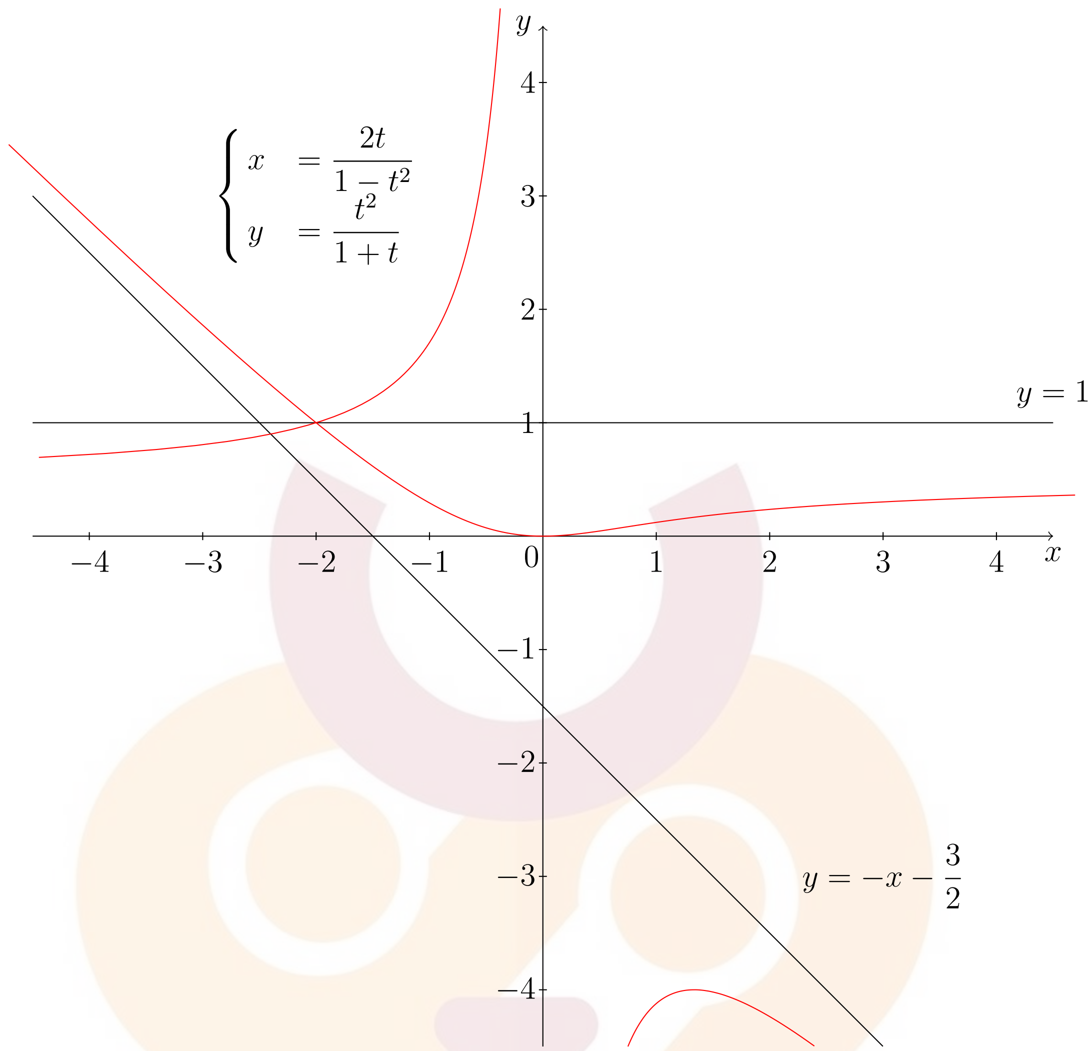
  Hàm số $y(t)$ đồng biến trên $(-\infty;-2)$, $(0;\infty)$ và nghịch biến trên $(-2;-1)$, $(-1;0)$.

3) Từ bảng biến thiên, đồ thị có 1 tiệm cận đứng là $x=0$ ứng với $t=\pm\infty$, có 1 tiệm cận ngang $y=\dfrac{1}{2}$ ứng với $t=1$.
   Xét $\lim\limits_{t\to-1}\dfrac{y}{x} = \lim\limits_{t\to-1}\dfrac{t^2(1-t^2)}{2(1+t)t} = \lim\limits_{t\to-1}\dfrac{t(1-t)}{2} = -1$
   $\Rightarrow$ Xét: $\lim\limits_{t\to-1}(y+x) = \lim\limits_{t\to-1}\left(\dfrac{t^2}{1+t}+\dfrac{2t}{1-t^2}\right) = \lim\limits_{t\to-1}\dfrac{t^2-t^3+2t}{1-t^2} = \lim\limits_{t\to-1}\dfrac{-(t-2)t}{1-t} = -\dfrac{3}{2}$
   Vậy đồ thị có 1 tiệm cận xiên $y=-x-\dfrac{3}{2}$

4) Xét phương trình $y=0 \Rightarrow t=0$. Đồ thị hàm số cắt Ox tại 1 điểm $(0;0)$
   Xét phương trình $x=0 \Rightarrow t=0$ Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm $(0;0)$
   Bảng giá trị:

t	-3	-2	0	2	3
x	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{3}{4}$
y	$-\frac{9}{2}$	-4	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{9}{4}$

5) Đồ thị hàm số:



f) $\begin{cases} x &= 2t - t^2 \\ y &= 3t - t^3 \end{cases}$

1) ĐKXĐ: $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$
Hàm số $x(t)$ không chẵn, không lẻ, không tuần hoàn.
Hàm số $y(t)$ là hàm lẻ.

2)
- Xét $x'_t = 2 - 2t$
$\Rightarrow x'_t = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
$\Rightarrow$ Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	1	$+\infty$
x'_t	$+$	0	$-$
x	$-\infty \nearrow$	1	$\searrow -\infty$

Hàm số $x(t)$ đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên $(1; \infty)$.

- Xét $y'_t = 3 - 3t^2$
$\Rightarrow y'_t = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$.
$\Rightarrow$ Bảng biến thiên:

CLB HỖ TRỢ HỌC TẬP

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'_t		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	∞	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y(t)$ đồng biến trên $(-1;1)$ và nghịch biến trên $(-\infty;-1)$, $(1;\infty)$.

3) Từ bảng biến thiên, đồ thị không có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang

Xét $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\dfrac{y}{x} = \lim\limits_{t\to\pm\infty}\dfrac{3t-t^3}{2t-t^2} = \infty$

Vậy đồ thị không có tiệm cận xiên

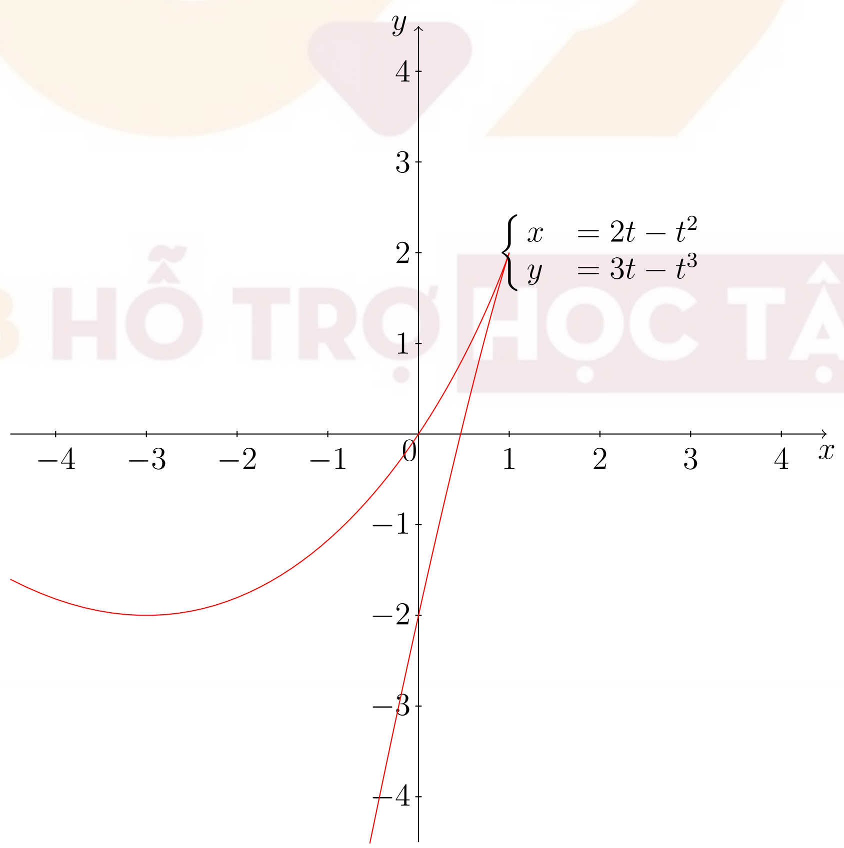
4) Xét phương trình $y = 0 \Rightarrow t = 0 \vee t = \pm\sqrt{3}$. Đồ thị hàm số cắt Ox tại 1 điểm $(0;0)$, $(0;\sqrt{3})$, $(0;-\sqrt{3})$

Xét phương trình $x = 0 \Rightarrow t = 0 \vee t = 2$ Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm $(0;0)$, $(2;0)$

Bảng giá trị:

t	-2	-1	0	1	2
x	-8	-3	0	1	0
y	-2	-2	0	2	-2

5) Đồ thị hàm số:



g) $r = a + b\cos\varphi, (0 < a \leq b)$

1) TXĐ $= \mathbb{R}$
Hàm số chẵn, tuần hoàn với chu kì $2\pi \Rightarrow$ Xét hàm số trên $[0; 2\pi]$.

2) Xét $r'_\varphi = -b\sin\varphi$
$\Rightarrow r' = 0 \Leftrightarrow \varphi = k\pi$ (với $k \in \mathbb{Z}$).
$\Rightarrow$ Bảng biến thiên trên $[0; 2\pi]$:

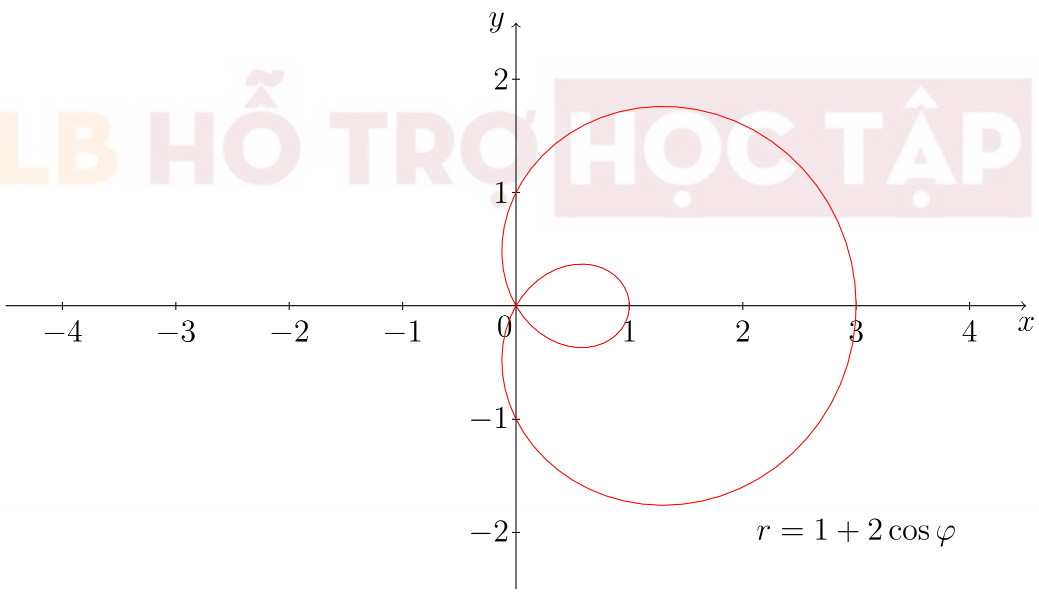
φ	0		π		2π
r'		$-$	0	$+$	
r	$a+b$	$\searrow$	$a-b$	$\nearrow$	$a+b$

3) Do $a - b \leq r \leq a + b$ nên hàm số không có tiệm cận.

4) Xét $y = r\sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = k\pi \vee \varphi = \arccos\dfrac{-a}{b} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ Đồ thị hàm số cắt Ox tại nhiều nhất 3 điểm $(0; 0), (a + b; 0), (b - a; 0)$
Xét $x = r\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \vee \varphi = \arccos\dfrac{-a}{b} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ Đồ thị hàm số cắt Oy tại 3 điểm $(0; 0), (0; a), (0; -a)$
Bảng giá trị:

φ	0	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	π
r	$a+b$	$a+\dfrac{b}{2}$	a	$a-\dfrac{b}{2}$	$a-b$

5) Đồ thị hàm số:



h) $r = a\sin 3\varphi, (a > 0)$

1) TXĐ $= \mathbb{R}$
Hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kì $\dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow$ Xét hàm số trên $[-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}]$.

2) Xét $r'_\varphi = 3a\cos 3\varphi$
$\Rightarrow r' = 0 \Leftrightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{3}$ (với $k \in \mathbb{Z}$).
$\Rightarrow$ Bảng biến thiên trên $[-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}]$:

φ	$-\frac{\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$
r'		$-$	0	$+$	0	$-$	
r	0	$\searrow$	$-a$	$\nearrow$	a	$\searrow$	0

3) Do $-a \leq r \leq a$ nên hàm số không có tiệm cận.

4) Xét $y = r\sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = k\pi \vee \varphi = k\dfrac{\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$ Đồ thị hàm số cắt Ox tại 1 điểm $(0; 0)$
Xét $x = r\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \vee \varphi = k\dfrac{\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$ Đồ thị hàm số cắt Oy tại 2 điểm $(0; 0), (0; -a)$

5) Đồ thị hàm số: